

Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode

Felix Ockelmann

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig**

Bericht Nr. 2018-122



Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Felix Ockelmann
geboren am 16.12.1989
aus Hamburg

Eingereicht am: 30. September 2017
Disputation am: 14. Februar 2018

Berichterstatter: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler
Prof. Dr.-Ing. Thomas Sonar

ISBN 978-3-926031-23-5

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2018

„Wer A sagt, der muß nicht B sagen.
Er kann auch erkennen, daß A falsch war.“
- Bertolt Brecht

Inhaltsverzeichnis

Notationen	1
Kurzfassung	5
1 Einleitung	7
1.1 Motivation	7
1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit	8
2 Diskrete Elemente Methoden für granulare Medien	11
2.1 Auswerten von Kontakten	12
2.1.1 Modell nach CUNDALL und STRACK	12
2.1.2 Erweiterung für den dreidimensionalen Raum	14
2.1.3 Modell nach HERTZ und MINDLIN	16
2.2 Erweiterung der Kontaktmodelle	18
2.2.1 COULOMB-Reibung	19
2.2.2 Kohäsion	19
2.3 Bewegungsgleichungen	20
2.4 Lösungsverfahren für die Bewegungsgleichungen	22
2.4.1 Explizites Zentrale-Differenzen-Verfahren	22
2.4.2 Semiexplizites Prädiktor-Korrektor-Verfahren	23
2.4.3 Fehlerbewertung	25
2.4.4 Stabilität	29
2.5 Modellierung von Randbedingungen	29
2.6 Dämpfungsverhalten	30
2.7 Kontaktsuche	31
3 Diskrete Elemente Methoden für Festkörper	35
3.1 Rotation des lokalen Koordinatensystems	35
3.2 Modellierung elastischer Kontinua	40
3.2.1 Dichteste Packungslage und Einheitszelle	40
3.2.2 Ermittlung der Modellparameter über eine Steifigkeitsmatrix .	41
3.2.3 Ermittlung der Modellparameter über das elastische Potential	43
3.3 Validierung	47
3.3.1 Würfel	47
3.3.1.1 Einachsiale Spannung	48
3.3.1.2 Schubspannung	50
3.3.1.3 Mehrachsialer Spannungszustand	51
3.3.1.4 Kritische Zeitschrittweiten	51

3.3.2	EULER Elastica	53
3.4	Besonderheiten des gewählten DEM-Modells	57
3.4.1	Energiedichte im Gebiet	57
3.4.2	Energiedichte in Randbereichen	58
3.4.3	Modifikation des Elastizitätstensors	61
3.4.4	Einfluss der Rotationsfreiheitsgrade	62
3.4.5	Schlussfolgerung	64
4	Simulation von Bruchvorgängen	67
4.1	Versagenskriterien	67
4.2	Kriterium lokaler Verzerrungen	69
4.3	Simulation von einachsialen Beton-Druckversuchen	70
4.3.1	Modellierung	71
4.3.2	Einfluss der Modellgröße	72
4.3.3	Einfluss des Zeitintegrationsverfahrens	74
4.3.4	Streuung der Materialparameter	76
4.4	Simulation von Zugversuchen an Betonprobekörpern	79
4.4.1	Modellierung	79
4.4.2	Numerische Simulation	80
4.5	Simulation von mehrachsialen Belastungen	81
5	Modellierung faserverstärkter Materialien	89
5.1	Modellerweiterung	89
5.1.1	Materialverhalten	89
5.1.2	Verbundverhalten	91
5.1.3	Implementierung	93
5.2	Druckversuche an faserverstärktem UHPC	97
5.2.1	Modellierung	97
5.2.2	Einfluss des Fasergehaltes	98
5.2.3	Einfluss der Auszugbedingung	101
5.3	Simulation von mehrachsialen Belastungen	103
6	Zusammenfassung und Ausblick	107
	Anhang A	109

Notation

Allgemein

a, \mathbf{a}	Skalar bzw. Tensor 0. Stufe
\mathbf{a}	Vektor bzw. Tensor 1. Stufe
\mathbf{A}	Matrix bzw. Tensor 2. Stufe
\mathbb{A}	Tensor 4. Stufe
\mathbf{a}	Quaternion
\mathbf{A}^T	Transponierte Matrix \mathbf{A}
$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$	Dyadisches Produkt
$\mathbf{a}\mathbf{b}, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$	Skalarprodukt
$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	Kreuzprodukt
$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$	einfach verjüngendes Produkt, im Sonderfall Skalarprodukt
$\mathbf{A} : \mathbf{B}$	zweifach verjüngendes Produkt
$ \mathbf{a} $	Betrag von \mathbf{a}
$\ \mathbf{a}\ $	Euklidische Norm von \mathbf{a}
da	Differential von a
$\frac{\partial}{\partial a}$	Partielle Ableitung nach a
$\frac{\partial^2}{\partial a^2}$	Zweite partielle Ableitung nach a
$\dot{\mathbf{a}}$	Zeitableitung von \mathbf{a}
Δ	Inkrement
$a \propto b$	a proportional zu b
$f(\mathbf{a}, a)$	Funktion von \mathbf{a} und a
\mathcal{O}	Ordnung
\mathbb{R}	Reelle Zahlen
\mathbb{H}	HAMILTON Zahlen

Indizes - Tiefgestellt

abs	absolut
af	Außenfläche
ak	Außenkante
bc	Randbedingung
c	Kontakt
d	Dämpfer
DP	DRUCKER-PRAGER
ef	effektiv
ez	Einheitszelle
f	Faser
g	Gravitation
gl	global
i, j	Partikel
k	Feder
$konti$	Kontinuum
kr	kritisch
lo	lokal
max	maximal
min	minimal
n, s, t	Lokale Richtungen
okt	Oktaeder
p	Prädiktor
red	reduziert
rel	relativ
res	resultierend
R	RANKINE
sl	Schlupf
u	Bruch
wb	Wasserbrücke
x, y, z	Globale Richtungen

Indizes - Hochgestellt

ij	Zugehörig zu Partikel i und j
t	Zeitpunkt

Skalare

a	Kontaktflächenradius
A	Querschnittsfläche
c	Kohäsion
C	Kontakt
\hat{C}	Elastizitätstensoreintrag
d	Dämpfungskonstante
e	Energiedichte
E	Elastizitätsmodul
f	Kraft
G	Schubmodul
I_1	1. Invariante $I_1(\boldsymbol{\sigma}) = \text{spur}(\boldsymbol{\sigma})$
I_2	2. Invariante $I_2(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}^T : \boldsymbol{\sigma} - \text{spur}(\boldsymbol{\sigma})^2)$
J_2	2. Invariante des Deviators
k	Federsteifigkeit
l, b, h	Abmessungen
l_c	Abstand zwischen zwei Partikeln
m	Moment
m	Masse
q_0, \dots, q_3	Reelle Anteile einer Quaternion
r	Radius
s	Schlupf
t	Zeitpunkt
u, v, w	Verschiebungen
W	Widerstandsmoment
α	Drehwinkel des lokalen Koordinatensystems
α_1	Faktor für die kritische Zeitschrittweite
α_d	LEHR'sches Dämpfungsmaß
$\alpha_{\varepsilon n}, \alpha_{\varepsilon s}$	Modellparameter des Bruchkriteriums
α_h	Dämpfungsmaß für den HERTZ-MINDLIN Kontakt
α_m	Faktor der Biegemoden am Versagenskriterium
γ	Schubverzerrung
δ	Relativverschiebung
Δt	Zeitschrittweite
ϵ	Fehler
ζ	Faktor

θ	Stabendverdrehung
μ	Reibbeiwert
μ_s	Mittelwert
ν	Querdehnzahl
Π	Formänderungsenergie
σ	Spannung
σ_s	Standardabweichung
φ	Winkel
ϕ	innerer Reibungswinkel
ω	Winkelgeschwindigkeit

Vektoren

b	Richtungsvektor Randbedingung
e	Lokaler Richtungsvektor
f	Kraftvektor
i, j, k	Basisvektoren des \mathbb{R}^3
m	Momentenvektor
p	Lastvektor
q	Vektoranteil einer Quaternion
u	Drehachse des lokalen Koordinatensystems
v	Verschiebungsfreiwerte
x	Position
$\dot{\mathbf{x}}$	Geschwindigkeit
$\ddot{\mathbf{x}}$	Beschleunigung

Matrizen

I	Identitätsmatrix
K	Steifigkeitsmatrix
M	Massenmatrix
R	Rotationsmatrix
T	Transformationsmatrix zur Reduktion der Freiwerte
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Verzerrungstensor
Θ	Trägheitsmatrix
σ	Spannungstensor
C	Elastizitätstensor

Kurzfassung

Normal- und Hochleistungsbeton sowie faserverstärkte Sonderbetone sind von großer Bedeutung für das Bauwesen. Beton ist einer der meist verbauten Baustoffe und zeichnet sich durch seine Vielseitigkeit sowie Wirtschaftlichkeit aus. Insbesondere der Zuschlag von Fasern und die Verbesserung der Faserverbundwirkungen in Hochleistungsbetonen ermöglichen immer neue Anwendungsgebiete und machen den Baustoff vielseitig verwendbar.

In der vorliegenden Arbeit erfolgt die Beschreibung des komplexen Materialverhaltens von Beton mit der Diskrete Elemente Methode (DEM), um die Schädigung von der makroskopischen Betrachtungsweise auf die mikroskopische Ebene konsistent herstellen zu können. Die Aufteilung von Strukturen in diskrete Partikel ermöglicht eine diskontinuierliche Beschreibung von Kontinua. Die makroskopischen Materialeigenschaften können über einen Vergleich von Energiedichten analytisch in die Modellparameter der DEM überführt werden. Eine verbesserte Einheitszelle von Partikeln in der kubisch dichtesten Packungslage ermöglicht die Modellierung isotroper Materialien unter großen Verschiebungen und Rotationen mit der DEM.

Beton ist ein spröder Werkstoff, der zu Rissbildung und Bruchversagen neigt. Die räumlich diskontinuierliche Formulierung mit der DEM erlaubt, dass das Berechnungsgebiet während der Simulation getrennt werden kann. Ein Versagenskriterium für initial verbundene Kontakte, basierend auf der Begrenzung lokaler Verzerrungen, ist in das vorhandene DEM Modell implementiert, um das materialspezifische Aufbrechen bzw. Reißen des Betons zu berücksichtigen. Das diskrete Modell ist dahingehend erweitert, dass Faserzuschläge berücksichtigt werden können. Die physikalischen Eigenschaften von Fasern und deren Verbund in der Betonmatrix sind in einem rheologischen Element zusammengefasst und in das bestehende Modell integriert. Die Simulation von ultrahochfestem Beton mit Faserzuschlag ist dargestellt.

1 Einleitung

Beton ist der am häufigsten verwendete Baustoff im konstruktiven Ingenieurbau. Aufgrund seiner Vielseitigkeit in der Anwendung sowie einer guten Wirtschaftlichkeit kommt Beton in fast allen Anwendungsgebieten zum Einsatz. Dem gegenüber steht ein sehr sprödes Materialverhalten, was die Verwendung von Bewehrung in zugbeanspruchten Teilen notwendig macht. Die Entwicklung neuer und innovativer Betone hat in den letzten Jahren viele hochfeste (HPC) und ultrahochfeste (UHPC) Varianten hervorgebracht. Diese Baustoffe haben eine extrem hohe Festigkeit, zeigen jedoch ein spröderes Versagensverhalten als Normalbetone. Das Material versagt schlagartig und ohne nennenswerte sichtbare Vorankündigung. Stahlfasern als Zuschläge für hochfeste und ultrahochfeste Betone bieten die Möglichkeit ein duktileres Versagen von Bauteilen und Strukturen zu bewirken. Bei der Rissbildung bildet sich ein komplexes Tragverhalten aus, in dem die Stahlfasern in der Lage sind Zugspannungen aufzunehmen und Energie zu dissipieren. Sind die Fasern fest in die Betonmatrix integriert und ist der Fasergehalt hoch genug, kann ein duktiler Bauteilversagen erreicht werden.

Für die Untersuchung von Materialien und Bauteilen sind grundsätzlich experimentelle und rechnerische Verfahren denkbar. Experimentelle Untersuchungen sind kostenintensiv oder technisch schwer umsetzbar. Es müssen demnach für viele Aufgabenstellungen Simulationen durchgeführt werden, um die Standsicherheit von Tragwerken nachweisen zu können. Rechnerische Verfahren lassen sich unterteilen in analytische und numerische Lösungsstrategien, wobei analytische Lösungen in der Regel nur für einfache Ingenieurmodelle oder bei komplexeren Aufgabenstellungen für Sonderfälle vorhanden sind. Die Auslegung komplexer Bauteile und Tragwerke erfolgt aus diesen Gründen heute auf Grundlage numerischer Berechnungen, wenn analytische Lösungen nicht existieren und experimentelle Untersuchungen unwirtschaftlich sind.

1.1 Motivation

Wirtschaftlichkeit hat beim Planen von Ingenieurkonstruktionen immer einen hohen Stellenwert. Die effiziente Nutzung von Baumaterialien und eine hohe Ausnutzung der materialspezifischen Reserven ist dabei unabdingbar. Zusätzlich besteht häufig ein großes Interesse an schlanken und platzsparenden Bauteilen, was eine hohe Festigkeit des Materials erfordert. Faserverstärkte Hochleistungsbetone haben eine sehr hohe Festigkeit und ermöglichen zusätzlich eine optimale Ausnutzung der Querschnitte, wenn durch die Faserbewehrung eine ausreichende Duktilität sichergestellt werden kann. Die Erforschung und Verbesserung dieser neuen Werkstoffe ist von

hohem Wert für die Ingenieurpraxis der Zukunft.

Die numerische Berechnung von Bauteilen oder Tragwerken unter mechanischer Beanspruchung erfolgt in der Regel mit der Finite Elemente Methode (FEM). Die FEM ist eine verbreitete Methode in der Strukturmechanik, die vielseitig anwendbar ist, jedoch die Kontinuität der Struktur voraussetzt. Unstetigkeiten des Materials oder der Struktur führen zu numerisch bedingten Ungenauigkeiten der Ergebnisse - Diskontinuitäten der Struktur können nicht betrachtet werden.

Homogenisierungsstrategien bieten eine Möglichkeit Heterogenitäten auf niedrigen Skalen zu berücksichtigen ohne die Unstetigkeiten im Lösungsverfahren auswerten zu müssen. Ansätze wie die Extended Finite Element Methode (XFEM) erlauben eine Simulation von nahezu diskontinuierlichen Strukturen, eine vollständige Trennung des Berechnungsgebietes ist jedoch nicht möglich. Werkstoffe wie Beton neigen jedoch zu Mikrorissbildung, Abplatzungen und sprödem Bruchversagen. Das Kontinuum wird getrennt, sodass Berechnungsgebiet während der Simulation nicht mehr zusammenhängend ist. Die Suche nach einem alternativen Lösungsverfahren führt auf die Diskrete Elemente Methode (DEM) als ein Teil der Partikelmethode. Die Modellbildung erfolgt mit Hilfe von diskreten Partikeln, die keine Partikel im Sinne von Kleinstteilchen darstellen, sondern Berechnungspunkte in LAGRANGE'scher Betrachtungsweise. Die Methode unterteilt das Gebiet a priori in getrennte Berechnungsgebiete und eignet sich deshalb, um Trennungen des Kontinuums diskret abzubilden.

Die Partikelmethode sind im Bereich der Strömungssimulationen mit der Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) Methode bereits weit verbreitet und bilden eine Alternative zu der FEM, den BOLTZMANN-Methoden (LBM), den Finite Volumen Verfahren - oder anderen Netzbasierten Methoden. Im Bereich der Festkörpermechanik gibt es bisher weniger Anwendungen mit Partikelbasierten Methoden.

Das komplexe Verformungsverhalten von high performance concrete (HPC) oder ultra high performance concrete (UHPC) stellt große Herausforderungen an die Modellentwicklung. Hochfestes und gleichzeitig extrem sprödes Verhalten führt zu schlagartigem Bruchversagen von Bauteilen und Tragwerken. Faserverstärkungen können ein duktileres Bauteilversagen erwirken, haben jedoch ein komplexes Tragverhalten im Verbund, wenn es zum Reißen des Betons kommt. Die auf der Mikroebene heterogen verteilten Materialeigenschaften sind die Motivation für die Modellbildung mit der DEM.

1.2 Zielsetzung und Aufbau der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Entwicklung eines Modells zur Beschreibung der mechanischen Eigenschaften von Beton bzw. spröden Werkstoffen. Das Verhalten der Materialien unter mechanischer Beanspruchung sowie das Bruchverhalten soll untersucht und mit der DEM modelliert werden. Das Modell soll die makro-

skopischen Materialeigenschaften des Kontinuums skalenunabhängig abbilden und belastbare Aussagen über das Verhalten der komplexen Baustoffe ermöglichen.

Die theoretische Grundlage für die Modellierung bildet die DEM. Ausgehend von der ursprünglich von CUNDALL und STRACK [15] vorgestellten Methode für die Berechnung granularer Medien im zweidimensionalen Raum, wird ein Modell entwickelt, dass die mechanischen Eigenschaften spröder Festkörper erfassen kann. Die makroskopischen Materialeigenschaften werden in die Modellparameter der DEM überführt, indem die Formänderungsenergie des Kontinuums mit der des diskreten Modells verglichen wird.

Rissbildungen, die zum Bruchversagen von Bauteilen führen können, werden im Modell diskret berücksichtigt. Die Überschreitung von Grenzwerten für die lokalen Verzerrungen wird als Rissinitialisierung definiert. Die bei der Rissbildung freiwerdende Energie bleibt erhalten und wird vom umliegenden Material aufgenommen, sodass die Rissfortpflanzung diskret berücksichtigt werden kann.

Die Erweiterung des Modells um Stahlfaserzuschläge ist erforderlich, um die bei der Rissbildung freiwerdende Energie aufzunehmen und teilweise dissipieren zu können. Die Fasern werden wie die Materialmatrix diskret und entsprechend ihrer Eigenschaften und des Verbundverhaltens mit dem Beton berücksichtigt. Sie werden bei der Rissbildung aktiviert und erwirken duktileres Bauteilverhalten. Das nichtlineare elastisch-plastische Materialverhalten sowie Auszugbedingungen für die Fasern sind im Modell berücksichtigt.

Bei der Modellbildung wird neben der Erfassung physikalischer Phänomene auch Wert auf eine effiziente programmtechnische Umsetzung gelegt. So werden explizite und semiexplizite Lösungsschemata, die eine hohe Parallelisierbarkeit der Modellauswertung ermöglichen, eingesetzt.

2 Diskrete Elemente Methoden für granulare Medien

Die DEM wurde erstmalig 1979 von CUNDALL und STRACK [15] als Berechnungsmethode für granulare Medien vorgestellt. Neben vielen Anwendungsgebieten in der Geotechnik ist das Verfahren grundsätzlich skalenunabhängig. Es können sowohl Anwendungsgebiete in der Astronomie, als auch in der Molekulardynamik (MD) gefunden werden. In diesem Kapitel wird zunächst die originale Methode dargestellt und danach für den dreidimensionalen Fall erweitert bzw. verallgemeinert. Es handelt sich bei der DEM um eine Methode zur Berechnung der Bewegung diskreter Punkte (Partikel) im Zeitbereich. Die Partikel sind räumlich ausgedehnt, aber in der Regel starr. Sie können während einer Simulation miteinander in Kontakt treten und sich wieder lösen. Mit der Auswertung von Kontaktbedingungen zwischen den Partikeln können verschiedene physikalische Phänomene untersucht werden. Eine äußere Verformung des Materials wird über die Überlappung der Partikel am Kontaktpunkt erreicht.

Neben runden (2D) bzw. sphärischen Partikeln sind in den letzten Jahren auch Modelle für komplexere Partikelgeometrien entwickelt worden, siehe z.B. CUNDALL [14] oder ZHAO ET AL [90]. Der Berechnungsaufwand der Kontaktauswertung ist für nichtrunde Partikel bedeutend höher, sodass die Mehrzahl aller DEM Modelle runde Partikel verwenden. In dieser Arbeit werden ebenfalls sphärische Partikel verwendet. Um andere Geometrien zu erzeugen, können Clusterstrukturen aus mehreren Partikeln verwendet werden, siehe Kapitel 3.

Der Berechnungsablauf der DEM kann grundsätzlich in drei Abschnitte unterteilt werden und ist in Abbildung 2.1 veranschaulicht. Zunächst werden alle Kontakte zwischen den Partikeln und gegebenenfalls Randbedingungen ausgewertet. Hierfür sind seit 1979 eine Vielzahl von Kontaktmodellen entstanden, die unterschiedliche Phänomene berücksichtigen. Eine Zusammenstellung von Kontaktmodellen liefern zum Beispiel SHÄFER ET AL in [72] oder PAULICK ET AL in [64]. Das ursprüngliche Kontaktmodell für granulare Medien mit zwei Erweiterungen für kohäsive Materialien sowie ein weiteres nichtlineares Modell nach HERTZ und MINDLIN werden in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

Vor dem Auswerten der Kontakte ist es zunächst notwendig mögliche Kontakte zwischen Partikeln aufzufinden. Da das Abfragen aller möglichen Kontaktpaare schon bei mittleren Partikelmengen zu einem sehr großem Berechnungsaufwand führt, sind Kontaktsuchalgorithmen entwickelt worden. Der in dieser Arbeit verwendete zweistufige modifizierte Linked-Cell Algorithmus (LCA) wird in Abschnitt 2.7 erläutert.

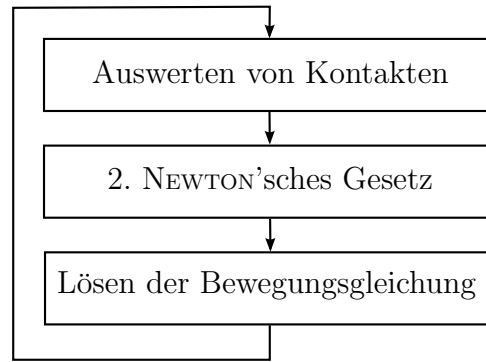


Bild 2.1: Berechnungsablauf von Diskrete Elemente Methoden

Der zweite Berechnungsabschnitt ist das Lösen des 2. NEWTON'schen Axioms. Aus den Kontaktauswertungen resultieren in der Regel Kräfte, die auf die Partikel wirken und über das 2. NEWTON'sche Axiom mit der Beschleunigung verknüpft sind. Es folgt ein Anfangswertproblem für die Bewegungsgleichung, dessen Lösung den letzten Teil des Berechnungsablaufes darstellt. Die in dieser Arbeit verwendeten Verfahren werden in Abschnitt 2.4 angegeben und analysiert.

2.1 Auswerten von Kontakten

Die Kontaktbedingungen zwischen zwei Partikeln sind Grundlage für jede Simulation mit der DEM. Partikel können endlich großen Teilchen entsprechen, sind aber häufig eher als Berechnungspunkte des umliegenden Materials zu verstehen. Mit dem Kontaktmodell werden somit entweder die physikalischen Eigenschaften des Kontaktes zweier Teilchen definiert oder die Eigenschaften des Materials abgebildet. In diesem Abschnitt wird das ursprüngliche Kontaktmodell nach CUNDALL und STRACK für granulare Medien im 2D vorgestellt. Anschließend erfolgt die Erweiterung für eine Berechnung im 3D. In Kapitel 2.1.3 wird ein erweitertes nichtlineares Kontaktmodell für granulare Medien nach HERTZ und MINDLIN gezeigt. Das nichtlineare Modell bietet den Vorteil, dass die lokalen Kontaktparameter direkt aus den Materialparametern ermittelt werden. Das ursprüngliche Modell von CUNDALL und STRACK hingegen enthält Modellparameter, die an Experimente und die gewünschten Eigenschaften angepasst werden müssen.

2.1.1 Modell nach CUNDALL und STRACK

Ein Kontakt besteht immer zwischen zwei Partikeln i und j , die mit einem rheologischen Element miteinander verknüpft sind. Das Element kann so gewählt werden, dass die materialspezifischen Eigenschaften abgebildet werden können. Im einfachsten Fall besteht das Kontaktmodell, wie in Abbildung 2.2, aus einem Feder-Dämpfer-Element, um viskoelastisches Materialverhalten in zwei Richtungen abzubilden. Das Modell wird von CUNDALL und STRACK in [15] vorgestellt.

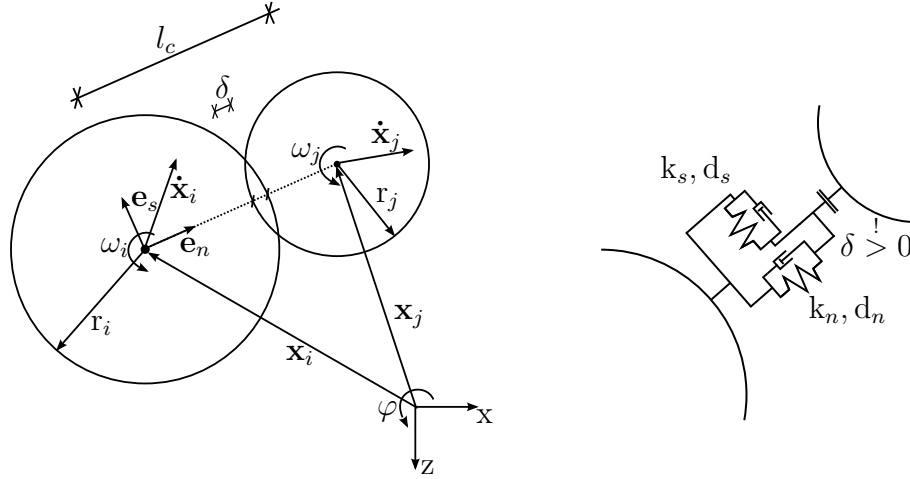


Bild 2.2: Kontaktgeometrie und -modell zwischen zwei Partikeln nach [15]

Zwei Partikel im Sinne von CUNDALL und STRACK treten in Kontakt, wenn deren Abstand,

$$l_c = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|, \quad (2.1)$$

kleiner ist als die Summe der Radii. Die Überlappung

$$\delta = r_i + r_j - l_c \quad (2.2)$$

hat also einen positiven Wert. Es wird angenommen, dass die Verformung der Partikel gegenüber der Verformung des Korngerüstes sehr klein ist. Die Partikel sind daher als starre, inelastische Körper modelliert, sodass eine elastische Verformung nur über die Überlappung der einzelnen Partikel an den Kontaktpunkten beschrieben werden kann.

Die Kontaktbedingung wird in der Ebene mit zwei lokalen Richtungsvektoren \mathbf{e} formuliert. Einer in Kontaktnormalenrichtung (Index n) und einer um 90° gegen den Uhrzeigersinn gedreht in Scherrichtung (Index s). Die Richtungsvektoren werden einmalig zu Beginn des Kontaktes definiert und gelten während der kompletten Kontaktphase als Wirkungsrichtung der Feder- und Dämpfungskräfte.

$$\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} e_x \\ e_z \end{bmatrix} = \frac{1}{l_c} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{e}_s = \begin{bmatrix} e_z \\ -e_x \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Die Auswertung des Kontaktes erfolgt mit den Geschwindigkeiten. Es wird zunächst die Relativgeschwindigkeit

$$\dot{\mathbf{x}}_{rel} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) + (\omega_i \mathbf{r}_i + \omega_j \mathbf{r}_j) \mathbf{e}_s \quad (2.5)$$

der Partikel am Kontaktpunkt ermittelt. Hierbei sind $\dot{\mathbf{x}}_i$ der Geschwindigkeitsvektor und ω_i die Winkelgeschwindigkeit des Partikels i zum Zeitpunkt der Kontaktauswertung.

Wird $\dot{\mathbf{x}}_{rel}$ mit Hilfe des lokalen Koordinatensystems in die Normalen- bzw. Scher- richtung projiziert, ergeben sich die zwei lokalen Relativgeschwindigkeiten

$$\dot{\mathbf{x}}_{rel,n} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_n \quad (2.6)$$

und

$$\dot{\mathbf{x}}_{rel,s} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_s + (\omega_i \mathbf{r}_i + \omega_j \mathbf{r}_j) \quad (2.7)$$

Die Annahme einer konstanten Geschwindigkeit über den betrachteten Zeitschritt führt auf die Relativverschiebungen im Zeitschritt Δt

$$\Delta \delta_n = [(\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_n] \Delta t \quad \text{und} \quad \Delta \delta_s = [(\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_s + (\omega_i \mathbf{r}_i + \omega_j \mathbf{r}_j)] \Delta t \quad (2.8)$$

Die aktuellen Relativgeschwindigkeiten sowie die inkrementellen Relativverschiebungen des Zeitschrittes erzeugen Feder- sowie den Dämpferkräfte, siehe Gleichungen (2.9) und (2.10). Die Kräfte in den Federkräften werden während der Berechnung kontinuierlich aufsummiert, die Dämpferkräfte hingegen werden mit der Momentangeschwindigkeit ausgewertet. In anderen Arbeiten werden häufig auch die Federn, oder nur die Feder in Normalenrichtung, absolut ausgewertet, siehe z.B. BELL ET AL [3] oder CLEARY und SAWLEY [11]. In der vorliegenden Arbeit wird für alle Richtungen die inkrementelle Auswertung verwendet, da diese Formulierung bei späteren Betrachtungen von Bruchvorgängen notwendig ist. Damit folgen die inkrementellen Federkräfte mit

$$\Delta f_{k,n} = -\Delta \delta_n k_n \quad \text{und} \quad \Delta f_{k,s} = -\Delta \delta_s k_s \quad (2.9)$$

und die Dämpferkräfte mit

$$f_{d,n} = -\dot{\mathbf{x}}_{rel,n} d_n \quad \text{und} \quad f_{d,s} = -\dot{\mathbf{x}}_{rel,s} d_s \quad (2.10)$$

Die Federkräfte des aktuellen Zeitschrittes t ergeben sich somit zu

$$f_{k,n}^t = f_{k,n}^{t-1} + \Delta f_{k,n} \quad (2.11)$$

und

$$f_{k,s}^t = f_{k,s}^{t-1} + \Delta f_{k,s} \quad (2.12)$$

2.1.2 Erweiterung für den dreidimensionalen Raum

Die Definition eines Kontaktes über den Abstand der Partikel aus Abschnitt 2.1.1 bleibt auch im 3D Raum erhalten. Das lokale Koordinatensystem wird um einen dritten Basisvektor erweitert. Mit den Positionen \mathbf{x}_i und \mathbf{x}_j wird erneut der Vektor in Normalenrichtung \mathbf{e}_n ermittelt. Senkrecht dazu wird mit \mathbf{e}_s und \mathbf{e}_t eine Ebene

aufgespannt, sodass die drei Vektoren \mathbf{e} eine orthonormale Basis am Kontaktpunkt bilden, siehe Abbildung 2.3.

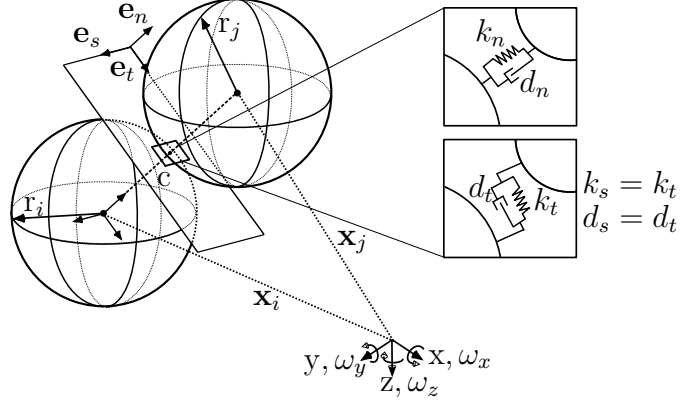


Bild 2.3: Kontaktgeometrie zweier Partikel im 3D

Die globalen Relativgeschwindigkeiten der Partikel am Kontaktpunkt

$$\dot{\mathbf{x}}_{rel} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) + (\boldsymbol{\omega}_i \times (\mathbf{e}_n \mathbf{r}_i) - \boldsymbol{\omega}_j \times (-\mathbf{e}_n \mathbf{r}_j)) \quad (2.13)$$

führen mit den drei Basisvektoren auf ein lokales Relativgeschwindigkeitsfeld

$$\dot{x}_{rel,n} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_n \quad (2.14)$$

$$\dot{x}_{rel,s} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_s + (\omega_{i,t} \mathbf{r}_i + \omega_{j,t} \mathbf{r}_j) \quad (2.15)$$

$$\dot{x}_{rel,t} = (\dot{\mathbf{x}}_i - \dot{\mathbf{x}}_j) \mathbf{e}_t - (\omega_{i,s} \mathbf{r}_i + \omega_{j,s} \mathbf{r}_j) . \quad (2.16)$$

An dieser Stelle wird die Rotationsmatrix

$$\mathbf{R}^{ij} = [\mathbf{e}_n \quad \mathbf{e}_s \quad \mathbf{e}_t] \quad (2.17)$$

definiert, mit der eine Projektion der globalen Relativgeschwindigkeiten auf das lokale Koordinatensystem durchgeführt werden kann. Gleichungen (2.14) bis (2.16) können zusammenfassend als

$$\dot{\mathbf{x}}_{rel,lo} = (\mathbf{R}^{ij})^T \dot{\mathbf{x}}_{rel} \quad (2.18)$$

geschrieben werden. Eine Transformation in das lokale Bezugssystem erfolgt mit der transponierten Rotationsmatrix, häufig auch als Transformationsmatrix bezeichnet. Zusätzlich zu den Relativgeschwindigkeiten ergibt sich eine Relativwinkelgeschwindigkeit um den Vektor \mathbf{e}_n . Die Torsionsbewegung wird in diesem erweiterten Modell nach CUNDALL nicht berücksichtigt, kommt aber im Modell nach HERTZ und MINDLIN in Abschnitt 2.1.3 zum Tragen. Die lokale Relativwinkelgeschwindigkeit,

$$\omega_{rel,n} = \omega_{i,n} - \omega_{j,n} , \quad (2.19)$$

entspricht der Differenz der lokalen Winkelgeschwindigkeiten. Die lokalen Größen ergeben sich aus einer Transformation der globalen Winkelgeschwindigkeiten in das lokale Bezugssystem.

$$\boldsymbol{\omega}_{lo} = (\mathbf{R}^{ij})^T \boldsymbol{\omega}_{gl} \quad (2.20)$$

Die Auswertung der Federn und Dämpfer erfolgt analog zu Abschnitt 2.1.1 für alle drei Raumrichtungen.

2.1.3 Modell nach HERTZ und MINDLIN

Das lineare Modell nach CUNDALL und STRACK ist eines der am häufigsten verwendeten Kontaktmodelle. Ein weiteres weit verbreitetes Modell ist der nichtlineare Kontakt nach HERTZ [33] und MINDLIN [37]. Der Kontakt findet dabei nicht über einen Punkt, sondern über eine Kontaktfläche statt. Ausgehend von HERTZ's Arbeiten über die Berührung elastischer Körper sind viele Abwandlungen des Modells entstanden, um verschiedene Phänomene abzubilden, siehe z.B. DOBRY ET AL [23], DI RENZO und DI MAIO [22] oder eine Zusammenstellung in PAULICK ET AL [64].

Das Modell wird häufig auf Grundlage der Kollision einer Sphäre mit dem elastischen Halbraum oder einer zweiten Sphäre hergeleitet. Diese Annahme perfekt runder Partikel entspricht häufig nicht der Realität, zumal es sich in vielen Fällen der DEM auch nicht um Partikel, sondern um idealisierte Berechnungspunkte handelt. Das Modell bietet jedoch den Vorteil die unbekannten Modellgrößen mit den makroskopischen Materialparametern zu beschreiben. Weiterhin ist der Ansatz einer nichtlinearen Zunahme der Steifigkeit bei größerer Überlappung der Partikel auch auf andere Geometrien übertragbar.

Für die Abbildung der makroskopischen Eigenschaften werden effektive Bezugsgrößen definiert, die die Eigenschaften der angrenzenden Partikel zusammenfassen. Für die Auswertung des Kontaktes werden der effektive E-Modul

$$\frac{1}{E_{ef}} = \frac{1 - \nu_i^2}{E_i} + \frac{1 - \nu_j^2}{E_j}, \quad (2.21)$$

der effektive Schubmodul

$$\frac{1}{G_{ef}} = \frac{2 - \nu_i}{G_i} + \frac{2 - \nu_j}{G_j} \quad (2.22)$$

sowie ein effektiver Radius

$$\frac{1}{r_{ef}} = \frac{1}{r_i} + \frac{1}{r_j} \quad (2.23)$$

definiert, siehe z.B. THORNTON [78] oder MARSHALL [54].

Die Auswertung der Normalkraft erfolgt auf Grundlage der Kontaktfläche, die über den Kontaktflächenradius a in Abhängigkeit der Überlappung δ_n ,

$$a^t = \sqrt{r_{ef} \delta_n^t} \quad (2.24)$$

definiert wird. Die daraus resultierende Kraft in Normalenrichtung zu jedem Zeitpunkt t mit

$$f_n^t = -\frac{4}{3} E_{ef} a^t \delta_n^t = -\frac{4}{3} E_{ef} \sqrt{r_{ef}} (\delta_n^t)^{3/2} \quad (2.25)$$

nichtlinear abhängig von der aktuellen Überlappung. In dieser Arbeit wird jedoch nicht die Absolutauswertung, sondern die inkrementelle Kontaktauswertung verwendet, um den Übergang eines gerissenen Kontaktes in eine Kollision beschreiben zu können, siehe Kapitel 4. Um den nichtlinearen Ausdruck (2.25) inkrementell auszuwerten zu können, muss dieser zunächst linearisiert werden. In anderen Arbeiten, z.B. THORNTON [78], findet sich meist die Linearisierung

$$f_n^{t+1} = f_n^t + \overbrace{\frac{\partial f_n^t}{\partial \delta_n^t} \Delta \delta_n}^{\Delta f_n} = f_n^t - 2 E_{ef} a^t \Delta \delta_n, \quad (2.26)$$

was einer expliziten Vorwärtsintegration entspricht. Genauere Ergebnisse bei größeren Zeitschritten oder hohen Kontaktsteifigkeiten aufgrund großer Überlappungen können mit dem des dritten Glied der Taylorreihe

$$f_n^{t+1} = f_n^t + \overbrace{\frac{\partial f_n^t}{\partial \delta_n^t} \Delta \delta_n + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_n^t}{\partial \delta_n^2} \Delta \delta_n^2}^{\Delta f_n} \quad (2.27)$$

3. Glied der Taylorreihe

$$= f_n^t - 2 E_{ef} a^t \Delta \delta_n - \frac{1}{2} E_{ef} a^t (\delta_n^t)^{-1} \Delta \delta_n^2 \quad (2.28)$$

erreicht werden. Die nachfolgende Simulation eines Kontaktes zweier Partikel verdeutlicht die Genauigkeit der unterschiedlichen Integrationsvorschriften.

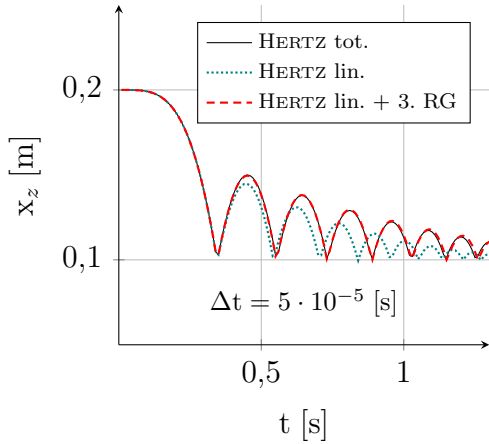


Bild 2.4: Bewegung eines Partikels bei wiederholtem Kontakt

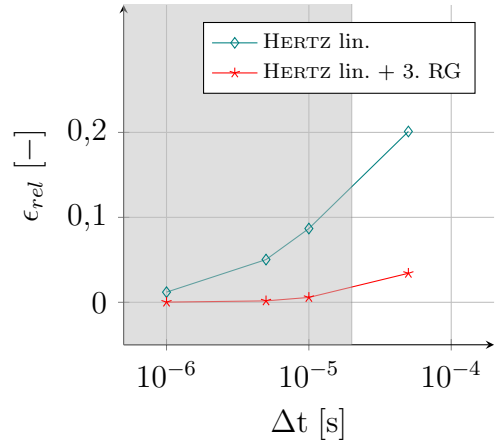


Bild 2.5: Fehler des linearisierten HERTZ-Kontaktes

Das Diagramm 2.4 zeigt die Bewegung eines Partikels, welches unter Eigengewicht auf ein zweites, festgehaltenes Partikel fällt. Es sind drei Arten der Kontaktauswertung für verschiedene Zeitschrittweiten angesetzt. Dieses sind zum Einen die aus

der Literatur bekannte totale Auswertung nach Gleichung (2.25), die Linearisierung aus Gleichung (2.26) sowie die in dieser Arbeit verwendete quadratische Näherung nach Gleichung (2.28). In Abbildung 2.5 ist für die unterschiedlichen Zeitschrittweiten der relative Fehler aufgetragen, der während der Berechnung auftritt. Als Referenzlösung für die Fehlerberechnung wird die totale Kontaktauswertung nach z.B. MARSHALL [54] verwendet. Es ist erkennbar, dass der Fehler für die einfache Linearisierung deutlich höher ist, als die Lösung, in der das dritte Glied der Taylorreihe (RG) berücksichtigt ist. Der grau hinterlegte Bereich zeigt die Zeitschrittweiten, die nach Abschnitt 2.4.4 für die Berechnung verwendet werden können, um eine stabile Berechnung zu gewährleisten. Die einfache Linearisierung zeigt in diesem Bereich noch große Fehler. Der zusätzliche Berechnungsaufwand der quadratischen Näherung ist also durch eine Verbesserung der Lösung gerechtfertigt.

Die Kräfte in Tangentialrichtung folgen einer linearen Materialgleichung und sind mit der Schubsteifigkeit festgelegt. Diese ist jedoch abhängig von der Überlappung in Normalenrichtung. In inkrementeller Schreibweise schlagen DI RENZO und DI MAIO [21]

$$\mathbf{f}_s^{t+1} = \mathbf{f}_s^t + \Delta \mathbf{f}_s \quad (2.29)$$

mit

$$\Delta \mathbf{f}_s = -8 G_{ef} a^t \Delta \delta_s \quad (2.30)$$

vor. Im Gegensatz zum Modell nach CUNDALL und STRACK [15] wird in diesem Modell aufgrund der Kontaktfläche auch ein Torsionswiderstand definiert. Die Schubsteifigkeit der Kontaktfläche erzeugt ein Moment

$$\mathbf{m}_n^{t+1} = \mathbf{m}_n^t + \Delta \mathbf{m}_n \quad (2.31)$$

um die Normalenachse des Kontaktes worin

$$\Delta \mathbf{m}_n = -4 G_{ef} (a^t)^3 \Delta \omega_n \quad (2.32)$$

2.2 Erweiterung der Kontaktmodelle

Die Kontaktmodelle aus den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.3 beinhalten eine reine Kraft- und Momentenübertragung. In diesem Abschnitt werden die Erweiterung um Einflüsse aus Reibung sowie die Berücksichtigung von Wasserbrückenbildung bei kohäsiven Medien vorgestellt. Die Modellierung einer Wasserbrücke ist für die Beschreibung von granularen Medien und vor allem Pulvern von hoher Bedeutung, siehe z.B. MIKAMI ET AL [56] oder LUDING [51]. Bei der Modellierung von Festkörpern sind Wasserbrücken im Normalfall nicht relevant. Die Berücksichtigung von Wasserbrücken hat jedoch erhebliche Bedeutung bei der Modellbildung der Wirkungsweise von Fasern und wird deshalb hier aufgeführt.

2.2.1 COULOMB-Reibung

Das Kontaktmodell aus Abbildung 2.2 wird um ein Reibelement erweitert. Das zugehörige rheologische Element sowie das Kraft-Weg-Diagramm sind in Abbildung 2.6 dargestellt. Die Aufnahmefähigkeit von Scherkräften wird dabei in Abhängigkeit der Normalendruckkraft begrenzt.

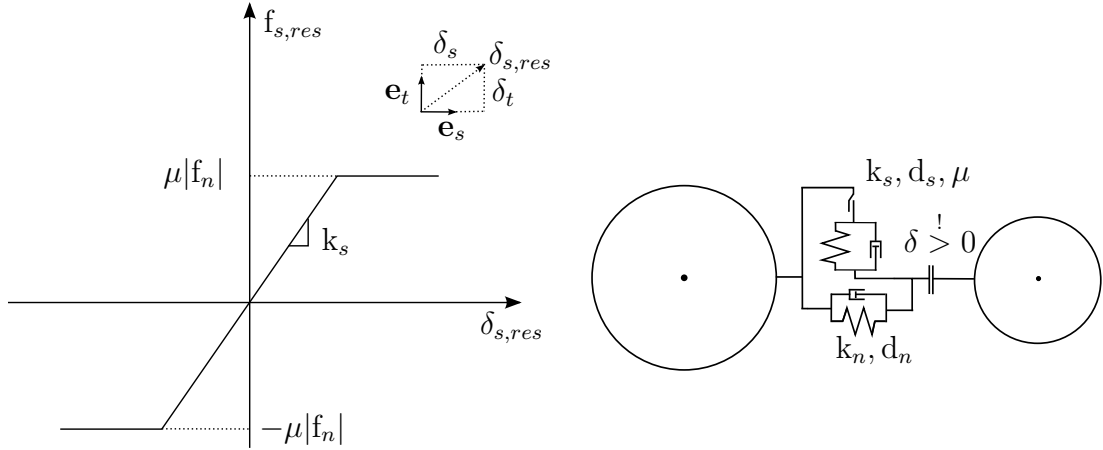


Bild 2.6: Kraft - δ - Diagramm in der Scherfläche und Kontaktmodell für COULOMB-Reibung

In jedem Zeitschritt wird überprüft, ob die resultierende Scherkraft in der Kontaktfläche,

$$f_{s,res}^t = ||\mathbf{e}_s f_s^t + \mathbf{e}_t f_t^t|| \quad (2.33)$$

kleiner als eine kritische Scherkraft

$$f_{s,kr}^t = \mu |f_n^t| \quad (2.34)$$

ist. Übersteigt die resultierende Scherkraft die kritische Scherkraft nicht, ist eine Haftung gegeben. Übersteigt $f_{s,res}^t$ die Haftbedingung, werden die Scherkräfte auf

$$f_{s,red}^t = f_s^t \frac{f_{s,kr}^t}{f_{s,res}^t} \quad \text{und} \quad f_{t,red}^t = f_t^t \frac{f_{s,kr}^t}{f_{s,res}^t} \quad (2.35)$$

abgemindert, siehe Abbildung 2.6.

2.2.2 Kohäsion

Die Wasserbrückenbildung bei kohäsiven Medien wird in DEM-Simulationen häufig mit zusätzlichen Federn im Kontaktmodell berücksichtigt. Ist beim Kontaktbeginn zweier Partikel mindestens eines mit Wasser benetzt, kommt es zur Wasserbrückenbildung mit anziehenden Kräften. Die anziehende Wirkung bleibt bestehen, auch

wenn sich die Partikel wieder voneinander entfernen. Die Brücke wird gelöst, sobald die Entfernung der Partikel einen kritischen Wert überschreitet. Das rheologische Element dieses Kontaktes ist in Abbildung 2.7 dargestellt.

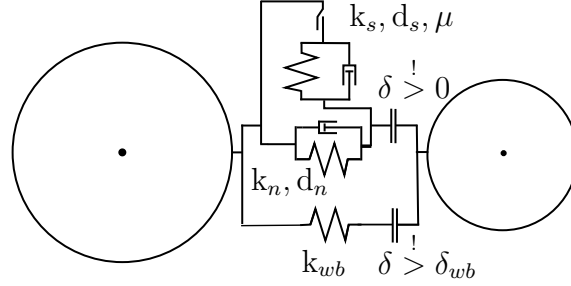


Bild 2.7: Kontaktmodell mit COULOMB-Reibung und Wasserbrücke

Die Kontaktgeometrie ist abhängig von der Überlappung δ der Partikel am Kontaktpunkt. Ist δ kleiner als Null, so ist lediglich die Wasserbrücke aktiv. In diesem Fall muss der Normalenvektor in jedem Schritt neu aufgebaut werden. Die Partikel sind frei verdrehbar und erfahren keinen tangentialen Widerstand durch die Wasserbrücke. Es treten lediglich Zugkräfte in der variablen Normalenrichtung auf. Dieser Ansatz wird in Abschnitt 5.1 auf die Modellierung von Faserverstärkungen übertragen.

2.3 Bewegungsgleichungen

Nach der Auswertung aller Kontakte folgt der zweite Berechnungsabschnitt - die Auswertung des zweiten NEWTON'schen Axioms. Die Kontaktauswertung erzeugt Feder- und Dämpfungskräfte zwischen den Partikeln. Werden die Kräfte in einem Kraftvektor zusammengefasst, erhält man einen Kontaktkraftvektor zum Zeitpunkt t ,

$$\mathbf{f}_c^t = \mathbf{e}_n (f_{k,n}^t + f_{d,n}^t) + \mathbf{e}_s (f_{k,s}^t + f_{d,s}^t) + \mathbf{e}_t (f_{k,t}^t + f_{d,t}^t) \quad . \quad (2.36)$$

Die auf die beiden Partikel i und j wirkenden Kräfte folgen zu

$$\mathbf{f}_{c,i}^t = \mathbf{f}_c^t \quad , \quad (2.37)$$

bzw.

$$\mathbf{f}_{c,j}^t = -\mathbf{f}_c^t \quad . \quad (2.38)$$

Jedes Partikel kann zum Zeitpunkt t mit mehreren anderen Partikeln in Kontakt stehen. Werden alle Kontaktkräfte für ein Partikel i summiert und eventuelle Einflüsse aus Randbedingungen oder Gravitation berücksichtigt, erhält man einen Ungleichgewichtszustand

$$\mathbf{f}_i^t = \sum_c \mathbf{f}_{c,i}^t + \mathbf{f}_{g,i}^t + \mathbf{f}_{bc,i}^t \quad . \quad (2.39)$$

Die äußere Kraft \mathbf{f}_i^t steht nach dem zweiten NEWTON'schen Axiom mit der Änderung des Impulses im Gleichgewicht. Setzt man eine konstante Masse m_i des Partikels voraus, so folgt für die translatorische Bewegung im Raum die Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{M}_i \dot{\mathbf{x}}_i) = \mathbf{M}_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{f}_i^t \quad (2.40)$$

worin

$$\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I} \quad (2.41)$$

Die Kontaktkräfte in Scherrichtung erzeugen zusätzlich Momente für die Partikel, da diese mit dem Radius einen Hebelarm zum Schwerpunkt haben. Im Falle des HERTZ-MINDLIN Kontaktes kommt zusätzlich ein Kontaktmoment aus der Torsionswirkung hinzu. Für die beiden Partikel folgen die Momente in lokalen Koordinaten zum Zeitpunkt t

$$\mathbf{m}_{lo,i}^t = \begin{bmatrix} m_n^t \\ m_s^t \\ m_t^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_n^t \\ -f_{c,t} r_i \\ f_{c,s} r_i \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

und

$$\mathbf{m}_{lo,j}^t = \begin{bmatrix} -m_n^t \\ -f_{c,t} r_j \\ f_{c,s} r_j \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

Die Transformation der lokalen Momente in globale Koordinaten erfolgt mit der Rotationsmatrix aus Gleichung (2.17). Für jedes Partikel folgt das Momentengleichgewicht zu

$$\mathbf{m}_i^t = \sum_c \mathbf{R}^{ij} \mathbf{m}_{lo,i}^t + \mathbf{m}_{bc,i}^t \quad (2.44)$$

Damit kann der Drallerhaltungssatz mit

$$\Theta_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i = m_i \quad (2.45)$$

sowie

$$\Theta_i = \begin{bmatrix} I_{xx} & & \\ & I_{yy} & \\ & & I_{zz} \end{bmatrix} = \frac{2}{5} m_i r_i^2 \mathbf{I} \quad (2.46)$$

angesetzt werden. Wenn die Trägheiten um die drei Achsen gleich sind, führt die Auswertung des Kreuzproduktes auf

$$\Theta_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \boldsymbol{\omega}_i \times \Theta_i \boldsymbol{\omega}_i = \Theta_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i + \begin{bmatrix} \omega_y \omega_z (I_{zz} - I_{yy}) \\ \omega_x \omega_z (I_{xx} - I_{zz}) \\ \omega_x \omega_y (I_{yy} - I_{xx}) \end{bmatrix}_i = \Theta_i \dot{\boldsymbol{\omega}}_i \quad (2.47)$$

Mit den Bewegungsgleichungen (2.40) und (2.45) können die aktuellen Beschleunigungen und Winkelbeschleunigungen eines Partikels berechnet werden.

2.4 Lösungsverfahren für die Bewegungsgleichungen

Die Partikel erfahren nach dem Auswerten der Kontakte sowie dem Lösen des 2. NEWTON-schen Axioms Beschleunigungen. Die Integration der Beschleunigungen bildet ein Anfangswertproblem für die Bewegungsgleichung und liefert die Positionen und Geschwindigkeiten des nächsten Zeitschrittes. Das Anfangswertproblem für die Bewegungsdifferentialgleichung 2. Ordnung mit allgemeiner rechter Seite kann als

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}, t) \quad (2.48)$$

geschrieben werden. Die Funktion f entspricht hierbei der Kontaktauswertung in einem Zeitschritt. Die Lösung von Gleichung (2.48) ist die räumliche Bewegung der Partikel in der Zeit. Das Anfangswertproblem kann auf verschiedene Weisen gelöst werden. Grundsätzlich können hierbei im- und explizite sowie Ein- und Mehrschrittverfahren unterschieden werden.

Für die Berechnung der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + 1$ werden bei expliziten Verfahren lediglich die Zustandsgrößen der Zeitpunkte $t - i$ mit $i \geq 0$ berücksichtigt. Implizite Verfahren verwenden zusätzlich die gesuchten Größen bei $t + 1$. Als Konsequenz muss in jedem Schritt ein meist nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden und die Funktionsauswertung in jedem Zeitschritt mehrfach erfolgen. Bei Anwendungen in der DEM werden in der Regel explizite Verfahren verwendet, wenn die Funktionsauswertung den größten Teil des Berechnungsaufwandes ausmacht.

Ein- und Mehrschrittverfahren unterscheiden sich darin, wie viele zurückliegende Berechnungspunkte für die Lösung des nächsten Schrittes $t + 1$ berücksichtigt werden. Während bei Einschrittverfahren nur die Zustandsgrößen zum Zeitpunkt t berücksichtigt werden, werden bei Mehrschrittverfahren auch frühere Zeitpunkte $t - 1, 2 \dots n$ berücksichtigt. Mehrschrittverfahren haben, neben einem erhöhten Speicheraufwand, den Nachteil einer gegebenenfalls notwendigen Anlaufrechnung und kommen in der DEM nur selten zum Einsatz.

Zwei auf dem Gebiet der DEM häufig verwendete Verfahren sind zum Einen das Prädiktor-Korrektor-Verfahren (PKV) nach GEAR [28] und zum Anderen das Schema der zentralen Differenzen (ZDS). Bei beiden Verfahren handelt es sich um Einschrittverfahren. Das explizite ZDS findet häufig Anwendung, so auch in dem ursprünglichen Vorschlag der Methode von CUNDALL und STRACK [15]. Das semiexplizite PKV kommt seltener zum Einsatz, wird aber beispielsweise von D'ADDETA [19] und SCHNEIDER [70] im Bereich der DEM für Festkörper genutzt. In den folgenden Abschnitten werden die beiden Verfahren kurz vorgestellt und analysiert. Für alle Berechnungen in dieser Arbeit ist das ZDS gewählt. Das ZDS erreicht für die vorliegenden Aufgabenstellungen die gleiche Konsistenzordnung wie das PKV, ist einfacher zu implementieren und effizienter.

2.4.1 Explizites Zentrale-Differenzen-Verfahren

Bei diesem Zentrale-Differenzen-Verfahren werden die Geschwindigkeiten zu den halben Zeitschrittweiten und die Beschleunigungen sowie Positionen zu den vollen Zeit-

punkten t berechnet. Aus den bekannten Geschwindigkeiten $\dot{x}^{t-0,5}$, den Positionen x^t und den Beschleunigungen \ddot{x}^t wird die Beschleunigung bei \ddot{x}^{t+1} ermittelt.

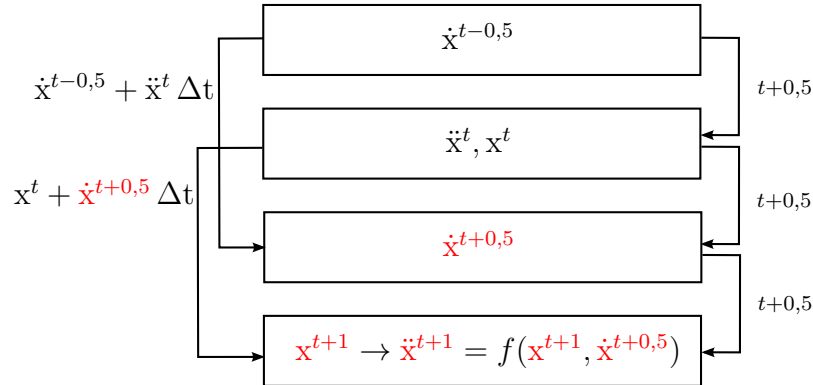


Bild 2.8: Ablaufschema - Zentrale Differenzen Verfahren

Zunächst werden mit den Beschleunigungen zum Zeitpunkt t die Geschwindigkeiten des nächsten halben Zeitschrittes ermittelt. Es wird dabei angenommen, dass die Beschleunigungen näherungsweise konstant innerhalb eines Zeitschrittes sind.

$$\dot{x}^{t+0,5} = \dot{x}^{t-0,5} + \ddot{x}^t \Delta t \quad . \quad (2.49)$$

Aus den Geschwindigkeiten wiederum ergeben sich unter erneuter Annahme eines konstanten Verlaufs im Intervall Δt die neuen Positionen

$$x^{t+1} = x^t + \dot{x}^{t+0,5} \Delta t \quad . \quad (2.50)$$

Mit den neuen Zustandsgrößen können nun die Kontakte ausgewertet und die Beschleunigungen des nächsten Zeitschrittes berechnet werden.

2.4.2 Semiexplizites Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Für eine übersichtliche Darstellung des Prädiktor-Korrektor-Verfahrens werden die Zustandsgrößen im NORDSIECK-Vektor [59]

$$\hat{\mathbf{x}}^t = \begin{bmatrix} x^t \\ \dot{x}^t \Delta t \\ \ddot{x}^t \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ \frac{d^3 x^t}{dt^3} \frac{1}{6} \Delta t^3 \\ \frac{d^4 x^t}{dt^4} \frac{1}{24} \Delta t^4 \\ \frac{d^5 x^t}{dt^5} \frac{1}{120} \Delta t^5 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

zusammengefasst. $\hat{\mathbf{x}}^t$ enthält die Zustandsgrößen bis zur fünften zeitlichen Ableitung der Position. Für die Ermittlung der Größen zum nächsten Zeitpunkt $t+1$ erfolgt zunächst eine explizite Extrapolation der Zustandgrößen für den nächsten Zeitschritt.

Die Extrapolation läuft nach dem in den Gleichungen (2.52) dargestellten Schema ab und wird Prädiktor genannt.

$$\begin{aligned}
x^{t+1} &= x^t + \dot{x}^t \Delta t + \ddot{x}^t \frac{1}{2} \Delta t^2 + \frac{d^3 x^t}{dt^3} \frac{1}{6} \Delta t^3 + \frac{d^4 x^t}{dt^4} \frac{1}{24} \Delta t^4 + \frac{d^5 x^t}{dt^5} \frac{1}{120} \Delta t^5 \\
\dot{x}^{t+1} &= \dot{x}^t + \ddot{x}^t \Delta t + \frac{d^3 x^t}{dt^3} \frac{1}{2} \Delta t^2 + \frac{d^4 x^t}{dt^4} \frac{1}{6} \Delta t^3 + \frac{d^5 x^t}{dt^5} \frac{1}{24} \Delta t^4 \\
&\dots \\
\frac{d^5 x^{t+1}}{dt^5} &= \frac{d^5 x^t}{dt^5}
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Mit Hilfe des NORDSIECK-Vektors und einer Extrapolationsmatrix \mathbf{P} können die Gleichungen (2.52) zu

$$\hat{\mathbf{x}}_p^{t+1} = \mathbf{P} \hat{\mathbf{x}}^t \tag{2.53}$$

vereinfacht werden. Hierbei ist

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.54}$$

Mit $\hat{\mathbf{x}}_p^{t+1}$ wird die Funktion f für \ddot{x}^{t+1} ausgewertet und anschließend der implizite Korrektur

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}^{t+1} = (f(\mathbf{x}_p^{t+1}, \dot{\mathbf{x}}_p^{t+1}) - \ddot{\mathbf{x}}_p^{t+1}) \frac{1}{2} \Delta t^2 \tag{2.55}$$

ermittelt. Mit $\Delta \hat{\mathbf{x}}^{t+1}$ kann die Korrektur der extrapolierten Werte erfolgen.

$$\hat{\mathbf{x}}^{t+1} = \hat{\mathbf{x}}_p^{t+1} + \mathbf{p} \Delta \hat{\mathbf{x}}^{t+1} \tag{2.56}$$

mit

$$\mathbf{p} = \left[\frac{3}{20} \quad \frac{251}{360} \quad 1 \quad \frac{11}{18} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{60} \right]^T. \tag{2.57}$$

Der Vektor \mathbf{p} ist dabei von GEAR [28] so gewählt, dass die gewünschte Konsistenzordnung erreicht wird und kann entsprechend der Funktion f angepasst werden, siehe hierfür ALLEN ET AL [1]. Hier ist \mathbf{p} für eine allgemeine rechte Seite nach GEAR [28] gewählt.

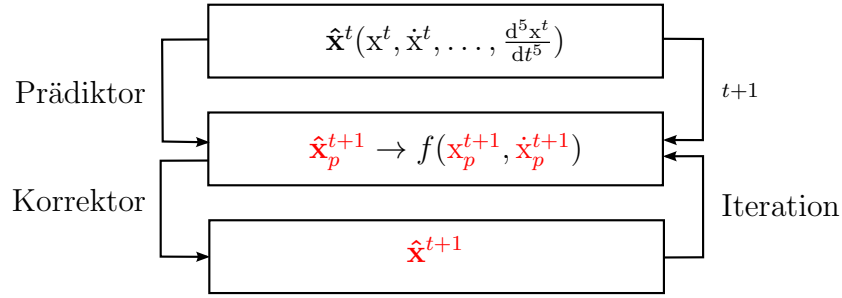


Bild 2.9: Ablaufschema - Prädiktor-Korrektor-Verfahren

Nach der Korrektur der Zustandsgrößen zum Zeitpunkt $t + 1$ können diese für die Extrapolation des nächsten Zeitschritts verwendet werden. Alternativ kann der Korrektor mehrfach durchgeführt werden, indem f mit den korrigierten Werten erneut ausgewertet wird. Diese Iteration kann mit einem Abbruchkriterium für die Änderung von $\Delta \hat{\mathbf{x}}^{t+1}$ belegt werden.

2.4.3 Fehlerbewertung

Bei der Modellierung physikalischer Phänomene werden an unterschiedlichen Stellen Fehler gemacht, die es abzuschätzen und zu bewerten gilt. Die Fehler lassen sich in drei Kategorien einteilen. Zunächst stellt jedes Modell nur eine Näherung für die Wirklichkeit dar. Dieser Modellfehler kann nur durch den Vergleich mit Experimenten oder Beobachtungen von Phänomenen in der Realität abgeschätzt werden. Je mehr physikalische Effekte bei der Modellbildung berücksichtigt werden, desto kleiner wird der Fehler - vorausgesetzt es wird ein grundsätzlich geeigneter Modellansatz verwendet.

Der zweite Fehler liegt in der numerischen Lösung der Modellgleichungen. Hier entsteht ein numerischer Fehler, da die Gleichungen in der Regel nicht exakt gelöst werden können. Bei Simulationen mit der DEM werden in der Regel explizite numerische Zeitintegrationsverfahren für die Lösung der Bewegungsgleichung gewählt. Das Ergebnis enthält somit einen numerischen Fehler. Um diesen abzuschätzen, kann die Konsistenzordnung des Lösungsverfahrens ermittelt und die Zeitschrittweite angepasst werden. Die beiden in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Lösungsverfahren werden anhand vereinfachender Beispiele auf ihre Konsistenzordnung untersucht. Die im Folgenden dargestellten Beispiele werden auch von SCHNEIDER [70] untersucht, um verschiedene Zeitintegrationsverfahren zu bewerten.

Das erste Beispiel aus Abbildung 2.11 wird mit den beiden Lösungsverfahren aus den vorangegangenen Abschnitten berechnet. Es handelt sich um einen Ein-Masse-Schwinger, der mit einer Anfangsgeschwindigkeit in einen ungedämpften Schwingungszustand angeregt wird. Untersucht wird ein Zeitraum von 2π [s]. Das Diagramm 2.10 zeigt, dass das PKV eine Konsistenzordnung von $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ erreichen kann, das ZDS hingegen lediglich die Konsistenzordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2)$. Eine Iteration des PKV ist nur für eine sehr grobe Diskretisierung der Zeit von Vorteil. Bei kleineren

Zeitschritten ergibt sich kaum eine Verringerung des Fehlers. Für komplexere Systeme kann die Iteration jedoch von Bedeutung sein, siehe z.B. SCHNEIDER [70]. Das Abbrechen der PKV-Kurven im Bereich kleiner Zeitschritte bzw. Fehler kann mit Rechnerungenauigkeiten begründet werden. Auf diese Fehler und ihre Bedeutung wird im späteren Verlauf dieses Abschnittes eingegangen.

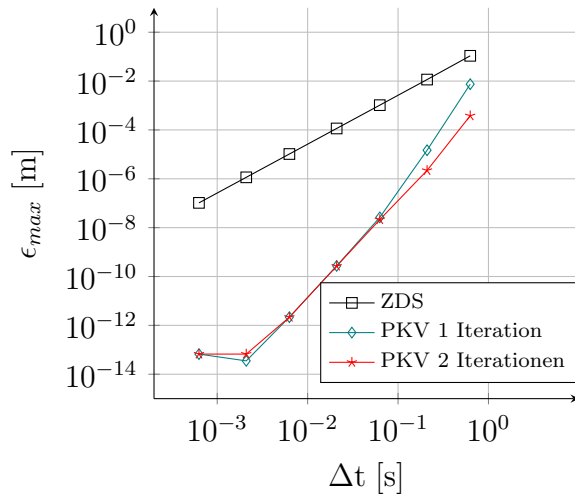


Bild 2.10: Fehler der Lösungsverfahren

$$\begin{aligned} k &= 1 \text{ [N/m]} \\ m &= 1 \text{ [kg]} \\ x_0 &= 0 \text{ [m]} \\ \dot{x}_0 &= 1 \text{ [m/s]} \\ \ddot{x}_0 &= 0 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$

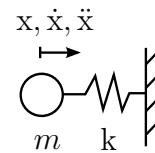


Bild 2.11: Ein-Masse-Schwinger

Als zweites Beispiel wird eine Kollision untersucht. Diese Art des Kontaktes ist während der Simulation von Bruchvorgängen jederzeit möglich und hat einen großen Anteil an der Lösung. Sowohl der Kontakt zwischen einem Partikel und einer Wand als auch der Kontakt zwischen zwei Partikeln kann auf das hier untersuchte Beispiel aus Abbildung 2.13 reduziert werden.

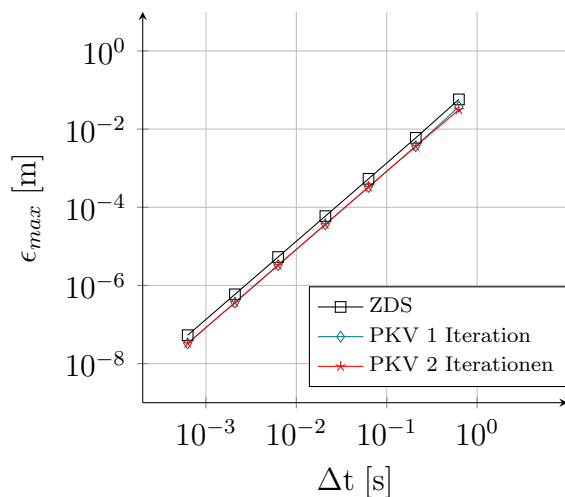


Bild 2.12: Fehler der Lösungsverfahren für eine Kollision

$$\begin{aligned} k &= 1 \text{ [N/m]} \\ m &= 1 \text{ [kg]} \\ x_0 &= -\pi \text{ [m]} \\ \dot{x}_0 &= 1 \text{ [m/s]} \\ \ddot{x}_0 &= 0 \text{ [m/s}^2\text{]} \end{aligned}$$

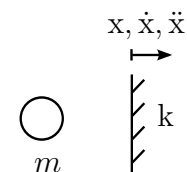


Bild 2.13: Kollision einer Masse mit einer Wand

Im Gegensatz zum Ein-Masse-Schwinger unterscheiden sich die Ergebnisse der Lösungsverfahren hier kaum. Beide Verfahren erreichen eine Konsistenzordnung von $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ und haben eine sehr ähnliche Fehlergrößenordnung. Das PKV kann die hohe Konsistenzordnung nur für spezielle rechte Seiten und eine unendlich oft stetig differenzierbare Lösung der Bewegung erreichen, siehe GEAR [28]. Dies ist für die harmonische Lösung des ersten Beispiels gegeben, für die Kollision jedoch nicht. Der Aufprall der Partikel untereinander oder an einer Wand stellt eine Unstetigkeit dar. Auch die Iteration des PKV kann die Konsistenzordnung nicht erhöhen. Da in dieser Arbeit auch das Bruchverhalten von Festkörpern untersucht wird, ist die Beschreibung von Kollisionen ein wesentlicher Bestandteil. Der Vorteil der höheren Konsistenzordnung des PKV gegenüber dem ZDS geht damit verloren. Das PKV beinhaltet die Möglichkeit einer einfachen Zeitschrittadaptation, wenn immer genau ein Zeitschritt untersucht wird. Beim ZDS werden hingegen auch Werte an halben Zeitschritten ausgewertet bzw. verwendet, was eine aufwendigere Umsetzung einer möglichen Adaption zur Folge hat. Trotz dessen wird aufgrund der aufwändigeren Implementierung, des erhöhten Berechnungsaufwandes sowie Speicherbedarfs des PKV, in dieser Arbeit das ZDS gewählt. Der numerische Fehler, der aufgrund des expliziten Lösungsverfahrens gemacht wird, kann mit der Konsistenzordnung $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ abgeschätzt bzw. bei der Wahl von Δt berücksichtigt werden.

Die dritte Fehlerquelle ergibt sich aus Rechnerungenauigkeiten. Bei Berechnungen mit dem Computer kann es zu Abschneide- und Rundungsfehlern sowie Absorptionen kommen. Werden beispielsweise Funktionen oder irrationale Zahlen als Reihenentwicklung dargestellt, ist diese endlich. Die fehlenden Terme stellen den Abschneidefehler dar.

Je nach Variablentyp stehen einem Rechner nur eine bestimmte Anzahl an Ziffern für die Darstellung einer Zahl zur Verfügung. Ist eine Zahl nicht endlich in ihren Nachkommastellen, kommt es in der letzten dem Rechner zur Verfügung stehenden Ziffer zu Rundungsfehlern. Diese treten in jeder numerischen Rechenoperation auf, wenn die Zahlen oder das Ergebnis nicht eindeutig dargestellt werden können. Es sollte also bedacht werden, dass nur eine endliche Anzahl von Zeitschritten berechenbar ist, ohne dass die Rundungsfehlerfortpflanzung signifikant werden kann. Das Aufsummieren von $1/3$ zeigt beispielhaft diesen Effekt. Summiert man n mal $1/3$ zum vorherigen Ergebnis hinzu, so pflanzt sich der Fehler in jedem Rechenschritt fort. Das Diagramm 2.14 zeigt den relativen Fehler während der Berechnung.

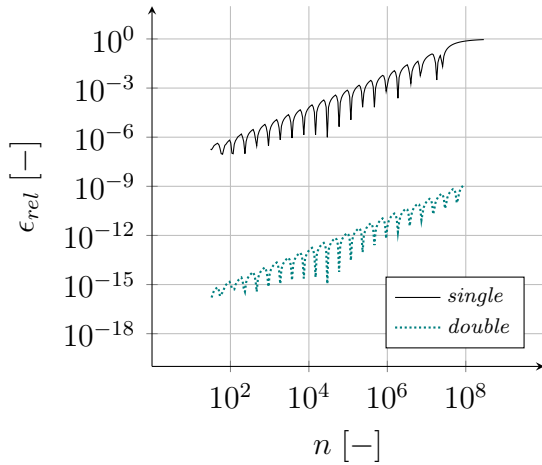


Bild 2.14: Fortpflanzung von Rundungsfehlern

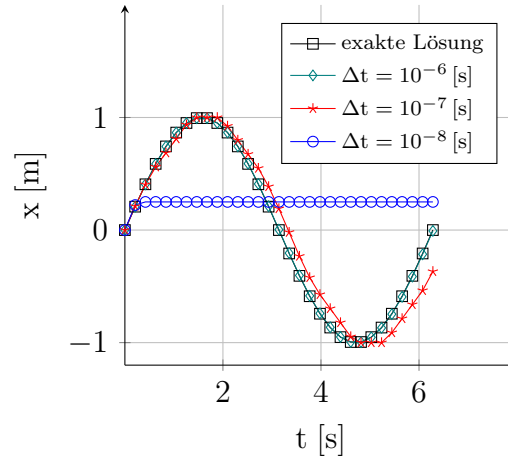


Bild 2.15: Absorption bei *single*-Genauigkeit

Diagramm 2.14 zeigt, dass der relative Fehler mit aufeinanderfolgenden Rechenoperationen zunimmt. ϵ_{rel} ist als Betrag dargestellt, um die logarithmische Darstellung zu ermöglichen. Diese Darstellung erzeugt an den Nulldurchgängen regelmäßige Unstetigkeiten in den beiden Verläufen. Beim Datentyp *single* ist das Ergebnis bereits bei 10^7 Schritten unbrauchbar, da der relative Fehler fast 10 % beträgt. In der programmtechnischen Umsetzung dieser Arbeit wird deswegen immer der Datentyp *double* verwendet. Der Fehler ist in der Ordnung geringer als bei *single*-Variablen, da mehr Ziffern zur Verfügung stehen. Jedoch wird auch hier der Fehler bei vielen Operationen relevant, da bei DEM - Simulationen aufgrund der expliziten Lösungsverfahren oft sehr kleine Zeitschritte mit mehreren Rechenoperationen gewählt werden müssen. Der zu berechnende Zeitraum sollte demnach nicht zu groß gewählt werden, damit die Rechnerungenauigkeit keinen signifikanten Einfluss auf das Ergebnis bekommt.

Neben den Rundungsfehlern kann das Aufsummieren oder Subtrahieren von Zahlen, die sehr unterschiedlich groß sind, das Phänomen der Absorption hervorrufen. Dabei ergeben sich die Zahlen mit deutlich niedrigerem Exponenten zu Null und werden nicht berücksichtigt. Dieser Effekt ist im Diagramm 2.14 am Ende des Berechnungsverlaufes des *single*-Datentyps zu sehen. Der aktuelle Wert wird durch das Addieren von $1/3$ nicht mehr größer und der relative Fehler nähert sich 100 % an. Das Diagramm 2.15 zeigt den Ein-Masse-Schwinger aus Abbildung 2.11, der mit dem ZDS und *single*-Variablen berechnet wurde. Für sehr kleine Zeitschritte sieht man, dass die Lösung schlechter wird. Bei einem $\Delta t = 10^{-8}$ [s] verändert sich die Position der Masse nach kurzer Zeit nicht mehr, da die addierten Werte absorbiert werden. Es muss also darauf geachtet werden, dass innerhalb eines Zeitschrittes die inkrementellen Größen gegenüber dem aktuellen Zustand nicht zu klein sind. Ein umfangreicher Überblick zu dieser Thematik findet sich beispielsweise in JOHNSON und RIESS [38].

2.4.4 Stabilität

Um die Stabilität der numerischen Simulation zu gewährleisten, darf die Zeitschrittweite Δt eine kritische Zeitschrittweite Δt_{kr} nicht überschreiten. Die kritische Zeitschrittweite orientiert sich an den im System auftretenden Eigenfrequenzen, die abgebildet werden müssen. Je höher die Frequenzen, desto kleiner müssen die Zeitschritte sein, um diese abbilden zu können. Ohne Dämpfung ist der kritische Zeitschritt mit

$$\Delta t_{kr} = \frac{2}{\omega_{max}} \quad (2.58)$$

festgelegt, siehe zum Beispiel CUNDALL und STRACK [15] oder JENSEN ET AL [36]. Die maximal im System auftretende natürliche Eigenkreisfrequenz ω_{max} ist in Simulationen mit der DEM nicht unmittelbar bestimmbar, da die Steifigkeitsmatrix des Systems nicht aufgebaut wird. Möglichkeiten, die Eigenfrequenzen eines Systems aus diskreten Elementen zu ermitteln bzw. abzuschätzen, werden zum Beispiel in TAVAREZ [77] vorgestellt. Als vereinfachende Annahme wird häufig die kleinste Masse sowie die größte Steifigkeit im System verwendet, um ω_{max} bzw. Δt_{kr} abzuschätzen. Dies führt auf eine Stabilitätsbedingung

$$\Delta t_{kr} = \alpha_1 \sqrt{\frac{m_{min}}{k_{max}}} \quad (2.59)$$

Der Faktor α_1 wird in der Regel zu 0,1 gewählt, siehe hierfür JENSEN ET AL [36] oder CUNDALL [14]. Andere Vorschläge für α_1 in ähnlicher Größenordnung machen z.B. TAVAREZ [77] oder MUNJIZA ET AL [57] und gehen dabei auf Einflüsse aus Dämpfung ein. In der vorliegenden Arbeit wird immer der vorgeschlagene Wert von $\alpha_1 = 0,1$ eingehalten. Handelt es sich bei der Simulation mit einem Kontaktmodell nach Abschnitt 2.1.1 oder um ausschließlich initial verbundene Kontakte nach Kapitel 3, kann die Steifigkeit k der Kontakte direkt ermittelt und die kritische Zeitschrittweite nach (2.59) ausgewertet werden. Wird hingegen das Kontaktmodell nach HERTZ und MINDLIN verwendet, ist die Steifigkeit nichtlinear und abhängig von der Überlappung der Partikel. In diesem Fall wird die Steifigkeit für die Gleichung (2.59) mit den Materialparametern der Partikel abgeschätzt, indem die Federsteifigkeiten eines Festkörpers mit äquivalenten Parametern ermittelt werden.

2.5 Modellierung von Randbedingungen

Neben den Kontakt- und Gravitationskräften enthält die Gleichung (2.39) auch die Kraftwirkungen \mathbf{f}_{bc} aus Randbedingungen. Hierin werden zwei Arten von Randbedingungen unterschieden. Zum Einen werden Kraft- und Wegrandbedingungen direkt am Partikel berücksichtigt. Kräfte können in vektorieller Form unmittelbar in Gleichung (2.39) berücksichtigt werden. Wegrandbedingungen werden an entsprechender Stelle während der Lösung der Bewegungsgleichung eingebracht, siehe Abschnitt 2.4.

Eine zweite Form der Randbedingung stellen starre Objekte dar mit denen die Partikel kollidieren können.

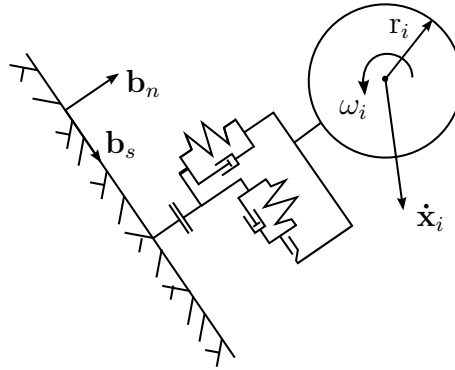


Bild 2.16: Kontaktgeometrie und Modell für starre Ränder

Abbildung 2.16 zeigt eine starre Randgeometrie - vereinfachend im 2D dargestellt. Bereits CUNDALL [15, 14] hat solche Randbedingungen formuliert, die in vielen DEM Simulationen genutzt werden. Eine allgemeinere Form mit der Möglichkeit zur Repräsentation in Kontaktsuchalgorithmen liefern z.B. KREMMER und FAVIER [41]. Im Bereich der Verfahrenstechnik werden auch komplexe starre Geometrien als Randbedingungen realisiert, siehe z.B. COETZEE ET AL [12, 13], HOU ET AL [35] oder OBERMAYR und VRETTOS [60].

Die aus dem Kontakt mit dem Rand resultierenden Kräfte werden analog zu den Partikel-Partikel Kontaktkräften ermittelt. Die Relativgeschwindigkeit zwischen einem Rand und einem Partikel wird auf die Wirkungsrichtungen des Randes \mathbf{b} projiziert. Über Feder-Dämpfungsparameter kann der Kontakt analog zu Abschnitt 2.1.1 bzw. 2.1.3 ausgewertet werden. Wird ein Kontakt nach 2.1.3 ausgewertet, werden die effektiven Größen mit unendlich großen Werten für die Steifigkeiten und den Radius der Randbedingung ermittelt. In Ansätzen der DEM-FEM-Kopplung können die Objekte der Randbedingung auch mit finiten Elementen als nachgiebige Körper modelliert werden, siehe z.B. CHUNG ET AL [10].

2.6 Dämpfungsverhalten

Bei einer Kollision zweier Massen in der Realität wird in der Regel Energie dissipiert. In dieser Arbeit wird Energiedissipation über die Dämpfungskonstanten der Kontaktmodelle realisiert. CUNDALL und STRACK [15] beschreiben neben der Möglichkeit der diskreten Dämpfung innerhalb der Kontaktauswertung, eine zweite Variante der globalen Dämpfung. Seit der Verbreitung der Methode sind viele weitere Dämpfungsmodelle entstanden. Die diskrete Dämpfung im Kontakt ist jedoch am weitesten verbreitet. Die Bestimmung der Dämpfungskonstanten d erfolgt anhand eines vereinfachenden Ein-Massen-Schwingers. Das LEHRsche Dämpfungsmaß α_d für

ein Ein-Freiheitsgrad-System,

$$\alpha_d = \frac{d}{2\sqrt{m k}} = \frac{d}{d_{kr}} \quad , \quad (2.60)$$

wird als Maß für die Dämpfung genutzt und die Dämpfungskonstante als

$$d = \alpha_d 2\sqrt{m k} \quad (2.61)$$

definiert. k ist jeweils die Steifigkeit in Normalen- oder Scherrichtung. Für m wird die geringere Masse des Kontaktpaares genommen, um die höheren Frequenzen mit α_d zu dämpfen. Die Dämpfungskonstanten werden in vielen Arbeiten so definiert, siehe z.B. CUNDALL und STRACK [15], CLEARY und SAWLEY [11] und viele andere. Für den Kontakt nach HERTZ und MINDLIN aus Abschnitt 2.1.3 ermitteln TSUJI ET AL [80] eine von δ abhängige Dämpfungskonstante

$$d_n = \alpha_h \delta_n^{1/4} \sqrt{m k_n} \quad (2.62)$$

in Normalenrichtung. Die analytische Lösung der Bewegungsgleichung ergibt, dass α_h direkt mit dem Restitutionskoeffizient verknüpft ist. Die Dämpfungskonstanten in den Scherrichtungen werden bei TSUJI ET AL [80] mit der ermittelten Konstante in Normalenrichtung gleichgesetzt.

2.7 Kontaktsuche

Während einer Simulation mit freien Partikeln kann jedes Partikel mit jedem in Kontakt treten. DEM-Simulationen mit mehreren Millionen Partikeln zur Beschreibung von Phänomenen im Bereich granularer Medien oder Strömungssimulation finden dabei immer häufiger Anwendung. Beispiele finden sich z.B. in SHIGETO und SAKAI [73] oder STEUBEN ET AL [76]. Das Abfragen aller möglichen Kontaktpaare in einem einstufigen Verfahren würde den Berechnungsaufwand mit der Ordnung $\mathcal{O}(n^2)$ unwirtschaftlich machen. Bei Simulationen mit vielen Partikeln muss das Auffinden von Kontakten durch Suchalgorithmen optimiert werden. Der Berechnungsaufwand kann dabei erheblich minimiert werden, indem mehrstufige Verfahren angewandt werden. Eine Übersicht dazu liefern z.B. WILLIAMS und O'CONNOR [87].

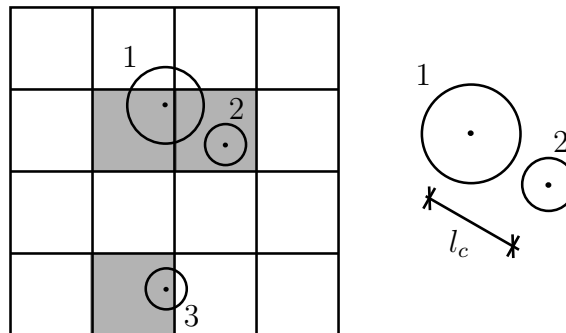


Bild 2.17: Zweistufiger Suchalgorithmus für Kontakte: Einsortierung in ein regelmäßiges Raster (links) und Überprüfung möglicher Kontaktpaare (rechts)

In dieser Arbeit wird ein zweistufiges Verfahren basierend auf einem modifizierten Linked-Cell Algorithmus verwendet. In einer ersten Stufe wird mittels eines Rasters eine Liste möglicher Kontakte aufgebaut. Alle Partikel werden in je eine Rasterzelle des Berechnungsgebietes sortiert. Liegen zwei Partikel in derselben oder in benachbarten bzw. verlinkten Zellen, können diese potentiell in Kontakt treten. In der zweiten Stufe werden die möglichen Kontakte überprüft, indem der Abstand der Partikel berechnet wird. Abbildung 2.17 zeigt die Einordnung der Partikel in das Raster und die anschließende Kontaktüberprüfung. Die Partikel 1 und 2 liegen in verlinkten Zellen und müssen deswegen in der zweiten Stufe auf einen Kontakt überprüft werden. Ein Kontakt von Partikel 3 mit den anderen Partikeln wird durch das Raster ausgeschlossen und braucht nicht überprüft zu werden.

Für die Kontaktsuche können adaptive sowie konstante Raster eingesetzt werden. Adaptive Raster, wie beispielsweise ein Octtree, müssen in jedem Berechnungsschritt neu aufgebaut werden. Der Octtree erzeugt in der ersten Stufe deutlich weniger mögliche Kontakte als ein konstantes regelmäßiges Raster. Durch den notwendigen Neuaufbau ist der Rechenaufwand jedoch im Allgemeinen höher. Aus diesem Grund wird zu Beginn der Simulation das Berechnungsgebiet mit einem regelmäßigen Raster belegt, dass während der Berechnung unverändert bleibt.

Die Größe der Rasterzellen orientiert sich an dem größten an der Simulation beteiligten Radius eines Partikels. Die Rasterzellen müssen mindestens die Abmessung des zweifachen maximal auftretenden Radius haben, damit keine Partikel in die übernächste - nicht verlinkte - Rasterzelle ragen und alle Kontakte erfasst werden. Für Partikelsysteme mit einer starken Streuung der Partikelradien, kann die erste Stufe des Algorithmus eine sehr umfangreiche Liste möglicher Kontakte liefern. Da die Größe der Rasterzellen sich nur am größten Partikel orientiert, werden viele kleine Partikel in dieselbe oder in benachbarte Rasterzellen einsortiert. Mehrstufige Raster für einen modifizierten Linked-Cell Algorithmus, siehe OGARKO und LUDING [62], können die Kontaktsuche für Systeme mit großer Streuung der Radien optimieren. Die Partikel werden abhängig von ihrem Radius in unterschiedliche, übereinanderliegende Raster von verschiedener Feinheit sortiert.

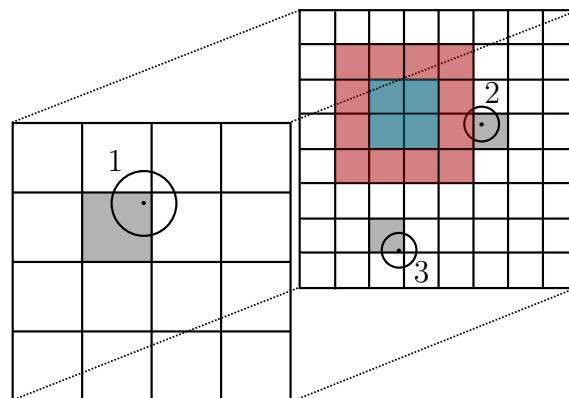


Bild 2.18: Modifizierter Linked-Cell Algorithmus nach OGARKO und LUDING [62]

In jedem Raster werden weiterhin die verlinkten Zellen ausgewertet und eine Liste möglicher Kontakte generiert. Zusätzlich werden zwischen den Rastern verlinkte Zellen definiert und damit rasterübergreifende Kontakte erfasst. Die Zelle von Partikel 1 im groben Raster ist beispielsweise wie bisher mit den umliegenden Zellen sowie zusätzlich mit den roten und türkisen Zellen des feineren Rasters verlinkt (siehe Abbildung 2.18). Das Beispiel aus Abbildung 2.17 kann mit dem modifizierten Algorithmus so optimiert werden, dass bereits nach der ersten Stufe alle Kontakte ausgeschlossen werden können. Der Rechenaufwand kann abhängig vom Verhältnis der auftretenden minimalen und maximalen Radii stark verringert werden, siehe OGARKO und LUDING [62].

3 Diskrete Elemente Methoden für Festkörper

In diesem Kapitel wird das Modell für granulare Medien für die Modellierung von Festkörpern erweitert. Die Grundannahmen der DEM sowie der Berechnungsablauf bleiben dabei unberührt. Die wesentliche Änderung ist, dass Partikel nicht nur während einer Simulation miteinander kollidieren, sondern auch initial verbunden sein können. Diese so genannten Clusterstrukturen werden in verschiedenen Bereichen eingesetzt. Die Idee wurde unter anderem von JENSEN ET AL [36] für die Abbildung von Schubverformungen im Boden entwickelt. Im Bereich der Festkörpermechanik werden häufig ausschließlich verbundene Partikel gewählt. Bei granularen Medien hingegen werden häufig viele kleine Clusterstrukturen erzeugt, um nichtrunde Geometrien für Körner oder andere geologische Strukturen zu generieren. Beispiele für Clusterstrukturen im Bereich granularer Medien finden sich z.B. in COETZEE ET AL [13] oder CHO ET AL [9].

In dieser Arbeit werden Systeme untersucht, die zunächst vollständig aus verbundenen Partikeln bestehen. Es handelt sich um Festkörper, die auf diskrete Punkte in Form von Partikeln aufgeteilt sind, und mit dem Schema der DEM berechnet werden. Die Grundlage für die verbundenen Partikel ist das Kontaktmodell von CUNDALL aus Abschnitt 2.1.1. Die Kontakte mit lokalen Steifigkeitsparametern müssen in der Lage sein das globale Verformungsverhalten des Festkörpers abzubilden. Es handelt sich bei der Bestimmung der Modellparameter um eine inverse Fragestellung, für dessen Lösung in den folgenden Abschnitten zwei Methoden vorgestellt werden. Weiterhin ist für die Simulation von Clusterstrukturen eine Aktualisierung des lokalen Koordinatensystems in jedem Zeitschritt notwendig und wird in Abschnitt 3.1 erläutert.

3.1 Rotation des lokalen Koordinatensystems

Clusterstrukturen müssen sich translatorisch und rotatorisch spannungsfrei im Raum bewegen können, wenn keine Randbedingungen gesetzt werden. Dafür ist es notwendig, dass das lokale Koordinatensystem in jedem Berechnungsschritt aktualisiert wird. Während bei granularen Medien die lokalen Basisvektoren zu Beginn des Kontaktes einmalig aufgebaut wurden, müssen diese für Festkörper entsprechend der Bewegung der Partikel aktualisiert werden. Eine gleichförmige Translationsbewegung der Partikel in der Clusterstruktur hat keinen Einfluss auf die Orientierung der Basisvektoren. Kommt es jedoch zu globalen Rotationen bzw. unterschiedlichen Translationen der Partikel, verändert sich das lokale Koordinatensystem. Betrachtet werden zwei Partikel eines initial verbundenen Clusterkontaktes, dessen lokales Koordinatensystem zu einem Zeitpunkt t links in Abbildung 3.1 dargestellt ist.

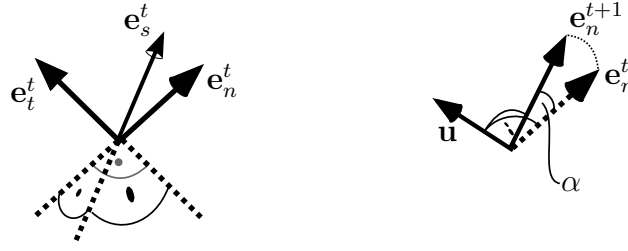


Bild 3.1: Lokales Koordinatensystem (links) und Drehung des lokalen Koordinatensystems um \mathbf{u} und α (rechts)

Verändert sich die Normalenrichtung zum nächsten Zeitpunkt $t + 1$ durch eine unterschiedliche Translation der Kontaktpartner, ergibt sich eine Rotation für \mathbf{e}_n^t .

Jede Rotation im \mathbb{R}^3 kann durch eine Achse \mathbf{u} und einen Winkel α beschrieben werden, die aus der Lage der beiden Normalenvektoren der Zeitschritte gegeben sind. Ziel ist die eindeutige Drehung der anderen beiden lokalen Einheitsvektoren \mathbf{e}_s^t und \mathbf{e}_t^t zwischen den Zeitschritten. Die Drehung wird in der vorliegenden Arbeit mit Hilfe von Quaternionen erreicht, da die Darstellung von Rotationen mit Quaternionen einige Vorteile gegenüber einer Darstellung mit z.B. EULER-Winkeln bietet.

EULER-Winkel besitzen Singularitäten, da eine Beschreibung von vier Freiheitsgraden (drei Freiheitsgrade der Rotationsachse und ein Winkel) mit drei Winkeln nicht eindeutig ist. Es kann dabei zum so genannten GIMBAL-Lock kommen. Ein weiterer Vorteil ist, dass bei Quaternionen vollständig auf trigonometrische Funktionen verzichtet werden kann. Der Rechenaufwand kann damit enorm verringert und Abschneidefehler aus Reihenentwicklungen (siehe 2.4.3) reduziert werden.

Quaternionen sind ein an die komplexen Zahlen angelehnter Zahlenbereich, der nach seinem Entdecker William Rowan HAMILTON, auch als die HAMILTON-Zahlen \mathbb{H} bezeichnet wird.

Eine Quaternion \mathbf{q} hat 4 reelle Anteile

$$\mathbf{q}(q_0, q_1, q_2, q_3) \quad (3.1)$$

und besteht aus einem skalaren und einem vektoriellen Teil.

$$\mathbf{q} = \overbrace{q_0}^{\text{Skalaranteil}} + \overbrace{\mathbf{q}}^{\text{Vektoranteil}} \quad (3.2)$$

mit:

$$\mathbf{q} = \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \quad (3.3)$$

\mathbf{i}, \mathbf{j} und \mathbf{k} sind dabei die Basisvektoren des \mathbb{R}^3 und bilden mit 1 gemeinsam die Standard-Basis der Quaternionen. Für die Multiplikation der Basis-Elemente gelten die HAMILTON-Regeln

$$\begin{aligned}
\mathbf{i}^2 &= \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = \mathbf{ijk} = -1 \quad , \\
\mathbf{ij} &= \mathbf{k} = -\mathbf{ji} \quad , \\
\mathbf{jk} &= \mathbf{i} = -\mathbf{kj} \quad \text{und} \\
\mathbf{ki} &= \mathbf{j} = -\mathbf{ik} \quad .
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Aus diesen Regeln folgt für die Multiplikation von zwei Quaternionen

$$\begin{aligned}
\mathbf{q} &= (q_0, \mathbf{q}) = q_0 + \mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3 \quad \text{und} \\
\mathbf{p} &= (p_0, \mathbf{p}) = p_0 + \mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3 \quad , \\
\mathbf{qp} &= q_0p_0 + q_0(\mathbf{i}p_1 + \mathbf{j}p_2 + \mathbf{k}p_3) + p_0(\mathbf{i}q_1 + \mathbf{j}q_2 + \mathbf{k}q_3) \\
&\quad + \mathbf{i}^2q_1p_1 + \mathbf{j}^2q_2p_2 + \mathbf{k}^2q_3p_3 \\
&\quad + \mathbf{ij}q_1p_2 + \mathbf{ik}q_1p_3 + \mathbf{ji}q_2p_1 + \mathbf{jk}q_2p_3 + \mathbf{ki}q_3p_1 + \mathbf{kj}q_3p_2 \\
&= q_0p_0 + q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} \\
&\quad - \mathbf{qp} \\
&\quad + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \\
&= \underbrace{q_0p_0 - \mathbf{qp}}_{\text{Skalaranteil}} + \underbrace{q_0\mathbf{p} + p_0\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \mathbf{p}}_{\text{Vektoranteil}} \quad .
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Das Ergebnis ist erneut eine Quaternion mit einem Skalar- sowie Vektoranteil. Für weitere mathematische Grundlagen siehe z.B. KUIPERS [42] oder HORN [34].

Um die Quaternionen für die Rotationen der Basisvektoren eines Clusterkontaktes zu nutzen, wird im Folgenden allgemein gezeigt, wie ein Vektor \mathbf{v} um die Achse \mathbf{u} und den Winkel α rotiert wird. Für die Rotation von \mathbf{v} muss der Vektor zunächst als eine reine Quaternion \mathbf{v} in den HAMILTON-Zahlenraum \mathbb{H} überführt werden. Dabei entspricht der Real- bzw. Skalaranteil der Quaternion 0 und der Imaginär - bzw. Vektoranteil \mathbf{v} .

$$\mathbf{v} = v_0 + \mathbf{v} = 0 + \mathbf{v} \tag{3.6}$$

Der allgemeine Operator für die Rotation einer Quaternion \mathbf{v} mit der Rotationsquaternion \mathbf{q} lautet

$$\mathbf{v}' = \mathbf{qvq}^{-1} \quad , \tag{3.7}$$

mit

$$\mathbf{q}^{-1} = q_0 - \mathbf{q} \quad . \tag{3.8}$$

(3.7) kann mit der Quaternionen-Multiplikation aus Gleichung (3.5) und allgemeinen Vektoroperationen als

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}\mathbf{v}\mathbf{q}^{-1} &= ((-\mathbf{q}\mathbf{v}) + (q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}))\mathbf{q}^{-1} \\
&= ((-\mathbf{q}\mathbf{v})q_0 - (q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v})(-\mathbf{q})) + ((\mathbf{q}\mathbf{v})\mathbf{q} + q_0(q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}) \\
&\quad + (q_0\mathbf{v} + \mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times (-\mathbf{q})) \\
&= (\mathbf{q}\mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) + (q_0\mathbf{v}) \times (-\mathbf{q}) + (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \times (-\mathbf{q}) \\
&= (\mathbf{q}\mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) + \mathbf{q} \times (\mathbf{q} \times \mathbf{v}) \\
&= (\mathbf{q}\mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) + (\mathbf{q}\mathbf{v})\mathbf{q} - (\mathbf{q}\mathbf{q})\mathbf{v} \\
&= 2(\mathbf{q}\mathbf{v})\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v} + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}) - \|\mathbf{q}\|^2\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{3.9}$$

ausgeschrieben werden. Das Ergebnis ist eine reine Quaternion bzw. ein Vektor des \mathbb{R}^3 . Wählt man die Rotationsquaternion zu

$$\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q} = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \mathbf{u} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \tag{3.10}$$

mit

$$\|\mathbf{q}\| = \sqrt{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} = 1 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{u}\| = 1 ,$$

dann entspricht der Operator aus Gleichung (3.7) bzw. (3.9) einer Drehung des Vektors \mathbf{v} um den Vektor \mathbf{u} und den Winkel α . Auf diese Weise können die Vektoren \mathbf{e}_s^t und \mathbf{e}_t^t entsprechend der Rotation von \mathbf{e}_n^t ermittelt werden. Dass die Quaternionen-Rotation mit der Einheitsquaternion aus Gleichung (3.10) der Rotation - ausgedrückt durch \mathbf{u} und α - entspricht, kann wie folgt gezeigt werden. Der Vektor \mathbf{v} hat einen Anteil \mathbf{v}_q in der Richtung von \mathbf{q} bzw. \mathbf{u} und einen Anteil \mathbf{v}_r senkrecht dazu. \mathbf{v} wird damit als reine Quaternion zu

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_q + \mathbf{v}_r . \tag{3.11}$$

Bei der Rotation von \mathbf{v} mit der Rotationsquaternion aus Gleichung (3.10), können die beiden Anteile getrennt betrachtet werden. Der Rotationsoperator darf keinen Einfluss auf den Anteil \mathbf{v}_q in Richtung der Drehachse haben.

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}\mathbf{v}_q\mathbf{q}^{-1} &= \mathbf{q}(0 + \mathbf{v}_q)\mathbf{q}^{-1} \\
&= \mathbf{q}(0 + \hat{\mathbf{v}}_q\mathbf{q})\mathbf{q}^{-1} \\
&= 2\hat{\mathbf{v}}_q(\mathbf{q}\mathbf{q})\mathbf{q} + q_0^2\hat{\mathbf{v}}_q\mathbf{q} + 2q_0(\mathbf{q} \times (\hat{\mathbf{v}}_q\mathbf{q})) - \|\mathbf{q}\|^2\hat{\mathbf{v}}_q\mathbf{q} \\
&= \hat{\mathbf{v}}_q(2\|\mathbf{q}\|^2 + q_0^2 + 0 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{q} \\
&= \hat{\mathbf{v}}_q(\|\mathbf{q}\|^2 + q_0^2)\mathbf{q} \\
&= \hat{\mathbf{v}}_q\mathbf{q} = \mathbf{v}_q
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Gleichung (3.12) zeigt, dass \mathbf{v}_q von der Rotation unberührt bleibt und nur der Anteil \mathbf{v}_r

$$\begin{aligned}
\mathbf{q}\mathbf{v}_r\mathbf{q}^{-1} &= \mathbf{q}(0 + \mathbf{v}_r)\mathbf{q}^{-1} \\
&= 2(\mathbf{q}\mathbf{v}_r)\mathbf{q} + q_0^2\mathbf{v}_r + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}_r) - \|\mathbf{q}\|^2\mathbf{v}_r \\
&= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v}_r + 2q_0(\mathbf{q} \times \mathbf{v}_r) \\
&= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v}_r + 2q_0\|\mathbf{q}\|(\mathbf{u} \times \mathbf{v}_r) \\
&= (q_0^2 - \|\mathbf{q}\|^2)\mathbf{v}_r + 2q_0\|\mathbf{q}\|\mathbf{v}_{r,\perp} \\
&= (\cos^2(\alpha/2) - \sin^2(\alpha/2))\mathbf{v}_r + 2\cos(\alpha/2)\sin(\alpha/2)\mathbf{v}_{r,\perp} \\
&= \cos(\alpha)\mathbf{v}_r + \sin(\alpha)\mathbf{v}_{r,\perp}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

von der Rotation verändert wird. Das Ergebnis aus Gleichung (3.13) entspricht der Rotation von \mathbf{v}_r in der kreisförmigen Ebene rechtwinklig zu \mathbf{q} bzw. \mathbf{u} um den Winkel α (siehe Abbildung 3.2). Zusammen mit dem unveränderten Anteil \mathbf{v}_q folgt die gedrehte Quaternion bzw. der gedrehte Vektor \mathbf{v}' .

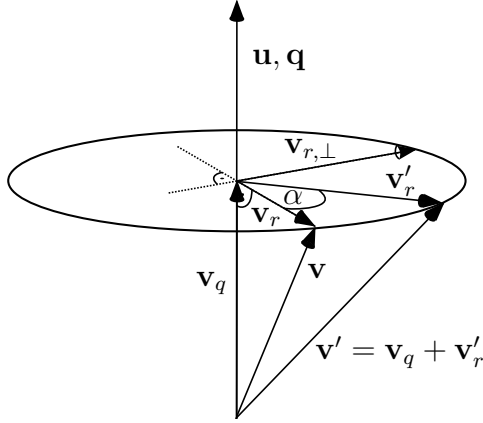


Bild 3.2: Rotation eines Vektors \mathbf{v} um \mathbf{u} und α nach z.B. KUIPERS [42]

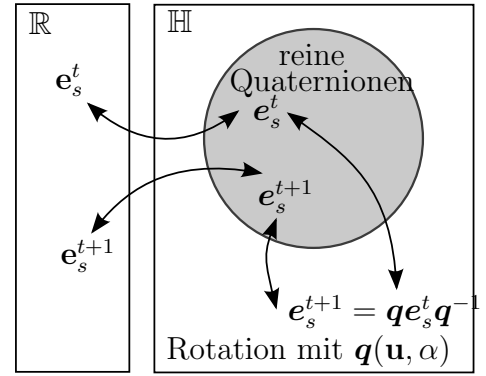


Bild 3.3: Schematische Darstellung der Rotation mittels Quaternionen

Der aktuelle lokale Einheitsvektor in Normalenrichtung \mathbf{e}_n^{t+1} wird aus den Positionen der Partikel des Kontaktes ermittelt. Aus dem neuen Richtungsvektor resultiert die Drehachse \mathbf{u} sowie der Drehwinkel α (siehe Abbildung 3.1) gegenüber dem letzten Zeitschritt.

Mit Hilfe der Quaternionen können daraufhin die Einheitsvektoren \mathbf{e}_s^{t+1} und \mathbf{e}_t^{t+1} zwischen den Zeitschritten effizient rotiert werden. Die Rotation ist eindeutig und hat keine Singularitäten. Um die trigonometrischen Funktionen in der Rotations-Quaternion zu vermeiden, kann

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\alpha)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \mathbf{e}_n^{t+1}\mathbf{e}_n^t}{2}} \tag{3.14}$$

sowie

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \mathbf{e}_n^{t+1} \mathbf{e}_n^t}{2}} \quad (3.15)$$

eingesetzt werden. Wenn die Basisvektoren die Länge 1 haben, bietet das Skalarprodukt die Möglichkeit bei der Rotation des lokalen Koordinatensystems vollständig auf Sinus- sowie Kosinus-Funktionen zu verzichten. Dies bedeutet eine erhebliche Reduktion des Berechnungsaufwandes sowie eine Verringerung der Abschneidefehler. Mit der Lage der neuen lokalen Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_n^{t+1}, \mathbf{e}_s^{t+1}, \mathbf{e}_t^{t+1})$ kann das Kontaktmodell des Clusterkontaktes ausgewertet werden.

3.2 Modellierung elastischer Kontinua

In den folgenden Abschnitten wird ein Modell entwickelt, welches in der Lage ist, das linear elastische Kontinuum mit der DEM abzubilden. Zunächst wird eine regelmäßige Anordnung der Partikel über das Kontinuum gewählt und eine symmetrische Einheitszelle extrahiert. An dieser Zelle werden in den Abschnitten 3.2.2 und 3.2.3 zwei Methoden vorgestellt, mit denen die makroskopischen Materialeigenschaften in die Modellparameter überführt werden können. Ziel ist jeweils die Festlegung der Federsteifigkeiten in Abhängigkeit der makroskopischen Materialparameter E und ν .

3.2.1 Dichteste Packungslage und Einheitszelle

Für die Anordnung der Partikel wird die kubisch dichteste Packungslage gewählt. Sie ist mit 74 % Masseanteil die dichteste Packungslage, die mit gleichgroßen Kugeln erreicht werden kann, und fasst das Kontinuum effizient auf diskrete Berechnungspunkte zusammen. Es können zwei gleich dichte Varianten dieser Packungslage unterschieden werden. Eine in der zwei Schichten hexagonal angeordneter Partikel (hexagonal dichteste Packungslage) abwechselnd aufeinander liegen und eine in der sich die Packungslage erst nach drei Schichten (kubisch dichteste Packungslage) wiederholt, siehe z.B. BRAUN [5]. In Abbildung 3.4 ist die dreischichtige kubisch dichteste Packungslage dargestellt, die auch in den folgenden Abschnitten Anwendung findet.

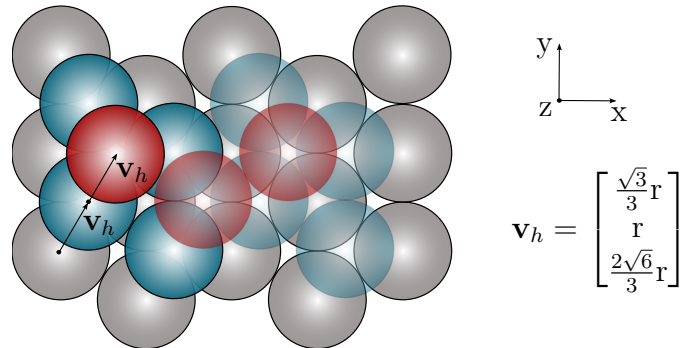


Bild 3.4: Dreischichtige kubisch dichteste Kugelpackung

Es ist zunächst notwendig aus der gewählten Anordnung eine symmetrische Einheitszelle zu erzeugen, um die DEM-Modellparameter für die Packungslagerung zu bestimmen. Dies kann nach Abbildung 3.5 geschehen. Aus vier Schichten kann nach einer Drehung die symmetrische Einheitszelle extrahiert werden. Das Ergebnis ist eine Zelle mit sechs halben und acht viertel Partikeln und einer Kantenlänge von $\sqrt{8}r$. Sie bildet die Grundlage für die Lösung der inversen Fragestellung der Modellparameter.

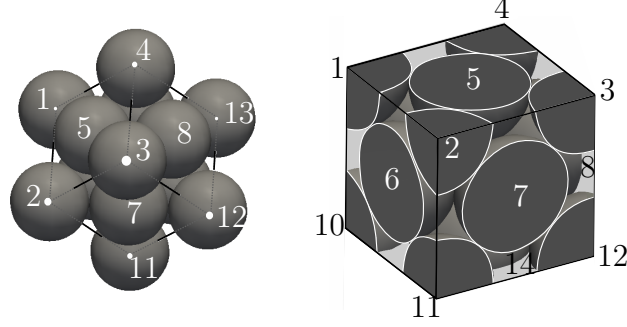


Bild 3.5: Ausschnitt aus der dreischichtigen dichtesten Packungslage (links) und symmetrische Einheitszelle (rechts) mit 14 beteiligten Partikeln

3.2.2 Ermittlung der Modellparameter über eine Steifigkeitsmatrix

In diesem Abschnitt wird eine Steifigkeitsmatrix für das Partikelsystem der Einheitszelle aus Abbildung 3.5 aufgebaut. Dieses Vorgehen wurde von TAVAREZ und PLESHA [77] oder LE ET AL [48] für zweidimensionale diskrete Elemente vorgestellt und wird hier erweitert. Jeder Kontakt zwischen zwei Partikeln kann über eine Steifigkeitsmatrix

$$\mathbf{K}_c = \begin{bmatrix} k_n & & & -k_n & & \\ & k_s & & & -k_s & \\ & & k_t & & & -k_t \\ -k_n & & & k_n & & \\ & -k_s & & & k_s & \\ & & -k_t & & & k_t \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

repräsentiert werden. In Gleichung (3.16) sind lediglich die translatorischen Freiheitsgrade der Partikel berücksichtigt - die Rotationen werden für die Herleitung in diesem Abschnitt vernachlässigt. Der Einfluss der zusätzlichen Freiheitsgrade wird in Abschnitt 3.4.4 untersucht.

Werden alle Kontakte mit Hilfe der Rotationsmatrix in globale Koordinaten transformiert und in einer Steifigkeitsmatrix \mathbf{K}_{ez} assembliert, gilt für diese der Zusammenhang

$$\mathbf{K}_{ez} \mathbf{v}_{ez} = \mathbf{p}_{ez} \quad (3.17)$$

Darin sind \mathbf{v}_{ez} der Vektor der Verschiebungsfreiwerte und \mathbf{p}_{ez} der Lastvektor. \mathbf{K}_{ez} ist dem Anhang A zu entnehmen. Die 14 Partikel der Einheitszelle haben insgesamt

42 Verschiebungsfreiheitsgrade, die je nach Belastung voneinander abhängig sind. Wird beispielsweise eine konstante Spannung σ_{xx} aufgebracht, kann \mathbf{v}_{ez} mit Hilfe einer Transformationsmatrix \mathbf{T} auf drei Freiheitsgrade zu

$$\mathbf{v}_{red} = \begin{bmatrix} u_{7,x} \\ u_{6,y} \\ u_{14,z} \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{v}_{ez} = \mathbf{T}^T \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ u_{1,y} \\ u_{1,z} \\ u_{2,x} \\ \dots \\ u_{14,z} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

reduziert werden. \mathbf{T} kann dem Anhang A entnommen werden und ist nur gültig für den einachsialen Spannungszustand. Die Steifigkeitsmatrix sowie der Lastvektor können ebenfalls mit Hilfe von \mathbf{T} auf die drei Freiheitsgrade reduziert werden, so dass sich ein Gleichungssystem

$$\mathbf{T}^T \mathbf{K}_{ez} \mathbf{T} \mathbf{v}_{red} = \mathbf{T}^T \mathbf{p}_{ez} \quad (3.19)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} 8k_n + 4k_s + 4k_t & 4k_n - 4k_s & 4k_n - 4k_t \\ 4k_n - 4k_s & 8k_n + 6k_s + 2k_t & 4k_n - 2k_s - 2k_t \\ 4k_n - 4k_t & 4k_n - 2k_s - 2k_t & 8k_n + 2k_s + 6k_t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{7,x} \\ u_{6,y} \\ u_{14,z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16r^2 \sigma_{xx} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

für die Einheitszelle unter einachsialer Spannung in x-Richtung ergibt. Für linear elastisches und vollständig isotropes Materialverhalten nach HOOKE gilt in diesem Fall

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu \sigma_{xx}}{E}. \quad (3.20)$$

Drückt man die Verzerrungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{2u_{7,x}}{\sqrt{8} r}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{2u_{6,y}}{\sqrt{8} r} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{zz} = \frac{2u_{14,z}}{\sqrt{8} r}, \quad (3.21)$$

mit den Freiheitsgraden des reduzierten Systems aus, können die Verschiebungen aus dem Gleichungssystem (3.19) durch

$$\begin{aligned} u_{7,x} &= \frac{\sqrt{8} r \sigma_{xx}}{2E}, \\ u_{6,y} &= -\frac{\sqrt{8} r \nu \sigma_{xx}}{2E} \quad \text{und} \\ u_{14,z} &= -\frac{\sqrt{8} r \nu \sigma_{xx}}{2E} \end{aligned} \quad (3.22)$$

ersetzt werden. Das Gleichungssystem (3.19) kann nun mit Hilfe der Gleichungen (3.22) nach den Federsteifigkeiten k_n , k_s und k_t aufgelöst werden, um diese in Abhängigkeit der Materialparameter E und ν zu definieren.

$$k_n = \frac{\sqrt{2} E r}{2(1 - 2\nu)} \quad \text{und} \quad k_s = k_t = \frac{\sqrt{2} E r (1 - 3\nu)}{2(1 - 2\nu^2 - \nu)}. \quad (3.23)$$

Diese Federsteifigkeiten für die kubisch dichteste Packungslage wurden auch auf anderem Wege von z.B. WANG und MORA [83] gefunden und haben zwei Grenzen für die Querdehnzahl ν . Es existiert zum Einen die Obergrenze $\nu = 0,5$, die als Inkompressibilität auch aus anderen Anwendungen bekannt ist. Zusätzlich ergibt sich eine zweite, geringere Obergrenze für $\nu = 1/3$, für die sich die Scherfedern zu null ergeben. Negative Steifigkeiten können zu Instabilitäten führen. Eine genauere Untersuchung folgt in Abschnitt 3.4. Diese unphysikalischen Obergrenzen ergeben sich aus der Geometrie der Partikelanordnung und wurden in vielen anderen Arbeiten sowohl für 2D als auch 3D Anwendungen gefunden, siehe z.B. GIFFITHS und MUSTOE [30], TAVAREZ und PLESHA [77] oder LI ET AL [49]. Die Federsteifigkeiten aus Gleichung (3.23) sind für den Fall des einachsialen Spannungszustandes ermittelt. Schubverformungen werden bisher nicht berücksichtigt. Es müsste für jeden Spannungszustand überprüft werden ob die hier ermittelten Federsteifigkeiten unverändert bleiben. Sollte dies nicht der Fall sein, liegt eine Form der Anisotropie vor, die in dieser Arbeit nicht verfolgt werden soll. Da diese Art der Herleitung abhängig von der aufgebrachten Last ist, wird im folgenden Abschnitt ein allgemeinerer Ansatz vorgestellt, der zeigt, dass die Federsteifigkeiten nach Gleichung (3.23) für $\nu > 0$ zu kubischer Anisotropie führen.

3.2.3 Ermittlung der Modellparameter über das elastische Potential

Die Federsteifigkeiten können, unabhängig von der Belastung, mit Hilfe der in der Einheitszelle gespeicherten Formänderungsenergie ermittelt werden. Ansätze dieser Art wurden auch in anderen Arbeiten verfolgt. Die Methode wird für zweidimensionale diskrete Elemente von GIFFITHS und MUSTOE [30] entwickelt und in anderen Arbeiten auch auf dreidimensionale Anwendungen übertragen, siehe z.B. KAIXIN und LINGTIAN [39] oder LI ET AL [49].

Standard Einheitszelle

Im Sinne einer allgemeinen Gültigkeit sowie einer kompletten Richtungsunabhängigkeit werden in dieser Arbeit zwei Bedingungen vorausgesetzt. Zum Einen sollen alle Kontakte zwischen Partikeln der Packungslage dieselben Federsteifigkeiten haben. In anderen Arbeiten werden Kontakte vor der Ermittlung des elastischen Potentials in Kategorien eingeteilt, siehe z.B. ZANG ET AL [88] oder GAO ET AL [27], was in dieser Arbeit aufgrund der symmetrischen Einheitszelle vermieden werden kann. Weiterhin sollen die Steifigkeiten der Scherfedern in einem Kontakt immer identisch sein. Diese Forderung ist physikalisch motiviert, da die Steifigkeit in einer homogenen Schubfläche in alle Richtungen gleich sein muss. Zusätzlich ergibt sich dadurch, dass die ursprüngliche Orientierung der Scherfedern eines Kontaktes nicht relevant für das Verhalten des Festkörpers ist. Auf diese Weise wird eine vollständige Richtungsunabhängigkeit des Modells erreicht. Die zweite Forderung wird in vielen Arbeiten nicht gestellt, sodass die Federsteifigkeiten in einer Schubebene unterschiedlich sind und das Modell immer anwendungsbezogen auf die Aufgabenstellung erzeugt werden muss, siehe z.B. KAIXIN und LINGTIAN [39] oder ZANG ET AL [88]. Im Folgenden wird nun die Energie, die in der Einheitszelle aus Abbildung 3.5 gespeichert ist,

zusammengefasst. Mit der in einer Feder gespeicherten Energie

$$\Pi_k = \frac{1}{2} k \delta^2 \quad , \quad (3.24)$$

ergibt sich die Formänderungsenergie in einem Kontakt zu

$$\begin{aligned} \Pi_c &= \frac{1}{2} k_n^i \delta_n^2 + \frac{1}{2} k_s^i \delta_s^2 + \frac{1}{2} k_t^i \delta_t^2 \\ &= 2r^2 \left(k_n^i (\varepsilon_{nn}^i)^2 + k_s^i (\varepsilon_{ns}^i)^2 + k_t^i (\varepsilon_{nt}^i)^2 \right) \quad , \end{aligned} \quad (3.25)$$

worin die lokalen Verzerrungen mit

$$\varepsilon_{nn} = \frac{\delta_n}{2r}, \quad \varepsilon_{ns} = \frac{\delta_s}{2r} \quad \text{und} \quad \varepsilon_{nt} = \frac{\delta_t}{2r} \quad (3.26)$$

definiert werden und aufgrund der Forderung der richtungsunabhängigen Scherfläche $k_s = k_t$ gilt. Um alle Kontakte der Zelle aufzusummieren, werden die lokalen Verzerrungen über

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{lo}^{ij} = \mathbf{R}^{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{gl} (\mathbf{R}^{ij})^T \quad (3.27)$$

mit den globale Verzerrungen beschrieben. Die Summe aller Kontakte, wobei Kontakte auf dem Rand der Einheitszelle nur mit dem Faktor $1/2$ berücksichtigt werden, folgt die gespeicherte Formänderungsenergie in der Einheitszelle

$$\Pi_{ez} = \sum_c \Pi_c \quad . \quad (3.28)$$

Π_{ez} wird durch das Volumen der Zelle geteilt, um eine Energiedichte e_{ez} zu erhalten, die mit der Energiedichte des Kontinuums

$$e_{konti} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.29)$$

verglichen werden kann. Leitet man die Energiedichten nach einer Verzerrung ab,

$$\frac{\partial e}{\partial \varepsilon_{ij}} = \mathbb{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \sigma_{ij} \quad , \quad (3.30)$$

erhält man die konjugierte Spannung. Das Ergebnis der Gleichung (3.30) für e_{konti} sind Verzerrungen mit Faktoren, die den Einträgen des Elastizitätstensors entsprechen. Wertet man die Gleichung (3.30) für e_{ez} aus, erhält man die globalen Spannungs-Dehnungs-Beziehungen,

$$\frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{xx}} = \sigma_{xx} = \frac{\sqrt{2}}{2r} (k_n + k_s) \varepsilon_{xx} + \frac{\sqrt{2}}{4r} (k_n - k_s) \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{2}}{4r} (k_n - k_s) \varepsilon_{zz} \quad (3.31)$$

$$\frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{yy}} = \sigma_{yy} = \frac{\sqrt{2}}{2r} (k_n + k_s) \varepsilon_{yy} + \frac{\sqrt{2}}{4r} (k_n - k_s) \varepsilon_{xx} + \frac{\sqrt{2}}{2r} (k_n - k_s) \varepsilon_{zz} \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{zz}} = \sigma_{zz} = \frac{\sqrt{2}}{2r}(k_n + k_s)\varepsilon_{zz} + \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n - k_s)\varepsilon_{xx} + \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n - k_s)\varepsilon_{yy} \quad (3.33)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{xy}} + \frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{yx}} \right) = \tau_{xy} = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s)(\varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yx}) = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s)\gamma_{xy} \quad (3.34)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{xz}} + \frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{zx}} \right) = \tau_{xz} = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s)(\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx}) = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s)\gamma_{xz} \quad (3.35)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{yz}} + \frac{\partial e_{ez}}{\partial \varepsilon_{zy}} \right) = \tau_{yz} = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s)(\varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zy}) = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s)\gamma_{yz} \quad , \quad (3.36)$$

deren Koeffizienten in einem Elastizitätstensor

$$\mathbb{C}_{DEM} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{C}_2 & & & \\ \hat{C}_2 & \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & & & \\ \hat{C}_2 & \hat{C}_2 & \hat{C}_1 & & & \\ & & & \hat{C}_3 & & \\ & & & & \hat{C}_3 & \\ & & & & & \hat{C}_3 \end{bmatrix} \quad , \text{ worin} \quad (3.37)$$

$$\hat{C}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2r}(k_n + k_s), \quad \hat{C}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n - k_s) \quad \text{und} \quad \hat{C}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s) \quad ,$$

zusammengefasst werden können. \mathbb{C}_{DEM} hat, wie der Elastizitätstensor des linear elastischen und isotropen Materials nach HOOKE, drei Einträge. Der Vergleich der Einträge ermöglicht die Ermittlung der Federsteifigkeiten in Abhängigkeit von E und ν . Die Elastizitätstensoren haben je drei Einträge, es können jedoch nur zwei Parameter angepasst werden. Die Ermittlung von k_n und k_s anhand der Einträge \hat{C}_1 und \hat{C}_2 ergibt die Federsteifigkeiten aus Abschnitt 3.2.2, Gleichung (3.23).

Der Anisotropiefaktor

$$\Lambda = \frac{2\hat{C}_3}{\hat{C}_1 - \hat{C}_2} \quad (3.38)$$

ergibt einen Wert von $\Lambda = 1$ für vollständig isotrope Eigenschaften. Wird Gleichung (3.38) für den Tensor \mathbb{C}_{DEM} ausgewertet, ergibt sich ein Wert

$$\Lambda = \frac{0,5k_n + 0,5k_s}{0,25k_n + 0,75k_s} \quad \begin{cases} 1, & \text{wenn } k_n = k_s \\ \neq 1, & \end{cases} \quad (3.39)$$

der nur für den Sonderfall $k_n = k_s$ gleich 1,0 ist. Das bedeutet, dass der Eintrag \hat{C}_3 nur dann dem des vollständig isotropen Kontinuums entspricht, wenn die Querdehnzahl $\nu = 0$ ist und damit $k_n = k_s$. Für jeden Fall $\nu > 0$ hat das diskrete Modell kubisch anisotrope Eigenschaften. Um dieses Phänomen unter der anfangs genannten Voraussetzung, dass die Scherfedern gleich sein sollen, zu verhindern, wird im Folgenden eine verbesserte Einheitszelle vorgestellt.

Modifizierte Einheitszelle

In der kubisch dichtesten Packungslage gibt es zwei Arten von Lücken zwischen den Partikeln. Es gibt Tetraederlücken (z.B. zwischen den Partikeln 2, 5, 6 und 7) und etwas größere Oktaederlücken (z.B. zwischen den Partikeln 2, 3, 5 und 7). Werden die Oktaederlücken der Packungslage mit Partikeln, die einen Radius der halben Lückengröße aufweisen, gefüllt, entsteht eine Einheitszelle wie in Abbildung 3.6 abgebildet.

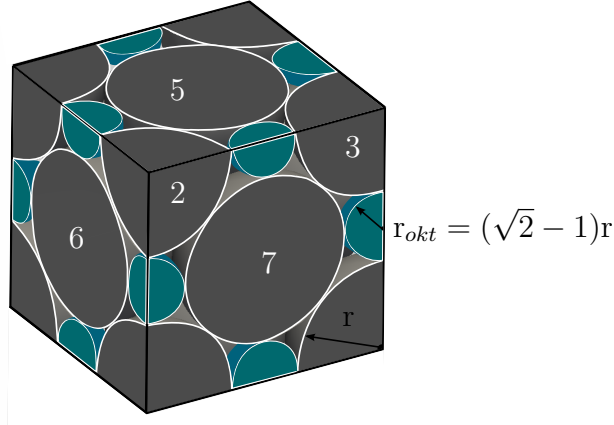


Bild 3.6: Symmetrische Einheitszelle mit gefüllten Oktaederlücken

Zwischen den größeren schichtweise hexagonal angeordneten Partikeln und den lückenfüllenden kleineren Partikeln entstehen zusätzliche Kontakte. Alle Kontakte haben dieselbe Steifigkeit k_n in Normalenrichtung. Kontakte zwischen den ursprünglichen Partikeln ($h-h$ -Kontakte) behalten die Federsteifigkeiten k_s in der Scherebene. Die Kontakte mit den kleineren Partikeln ($h-o$ -Kontakte) erhalten Scherfedern der Größe k_{okt} . Die Gleichung (3.28) wird um die Energieanteile der zusätzlichen Kontakte erweitert, sodass die Energie in der Einheitszelle zu

$$\begin{aligned} \Pi_{ez} = & \sum_{h-h} 2r^2 (k_n^{ij} (\varepsilon_{nn}^{ij})^2 + k_s^{ij} (\varepsilon_{ns}^{ij})^2 + k_s^{ij} (\varepsilon_{nt}^{ij})^2) \\ & + \sum_{h-o} \frac{1}{2} (r + r_{okt})^2 (k_n^{ij} (\varepsilon_{nn}^{ij})^2 + k_{okt}^{ij} (\varepsilon_{ns}^{ij})^2 + k_{okt}^{ij} (\varepsilon_{nt}^{ij})^2) \end{aligned} \quad (3.40)$$

folgt. Differenzieren der Energiedichte führt auf einen neuen Elastizitätstensor mit ebenfalls drei Einträgen

$$\hat{C}_1 = \frac{\sqrt{2}}{4r} (4k_n + 2k_s) \quad , \quad \hat{C}_2 = \frac{\sqrt{2}}{4r} (k_n - k_s) \quad \text{und} \quad \hat{C}_3 = \frac{\sqrt{2}}{4r} (k_n + k_s + k_{okt}) \quad . \quad (3.41)$$

Der Anisotropiefaktor

$$\Lambda = \frac{2\hat{C}_3}{\hat{C}_1 - \hat{C}_2} = \frac{2k_n + 2k_s + 2k_{okt}}{3k_n + 3k_s} \quad \begin{cases} 1, & \text{wenn } 2k_{okt} = k_n + k_s \\ \neq 1, & \end{cases} \quad (3.42)$$

zeigt, dass die Einheitszelle zwei unabhängige Steifigkeiten k_n und k_s sowie eine Linearkombination k_{okt} besitzt. Das bedeutet, dass es zwei unabhängige Parameter gibt, um E und ν anzupassen, und einen dritten Parameter, damit die drei Tensoreinträge wiedergegeben werden können. Auf diese Weise kann vollständig isotropes Material abgebildet werden. Die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} &\stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{4r}(4k_n + 2k_s) , \\ \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} &\stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n - k_s) \quad \text{und} \\ \frac{E}{2(1+\nu)} &\stackrel{!}{=} \frac{\sqrt{2}}{4r}(k_n + k_s + k_{okt}) \end{aligned} \quad (3.43)$$

führen auf die Federsteifigkeiten

$$\begin{aligned} k_n &= \frac{\sqrt{2} E r}{3(1-2\nu)} , \\ k_s &= \frac{\sqrt{2} E r(1-5\nu)}{3(1-2\nu^2-\nu)} \quad \text{und} \\ k_{okt} &= \frac{\sqrt{2} E r}{3(1+\nu)} . \end{aligned} \quad (3.44)$$

Die Federsteifigkeiten haben erneut eine Grenze für die Querdehnzahl von $\nu = 0,2$, bei der die Scherfedern k_s der h - h -Kontakte null ergeben. Die Bedeutung und Auswirkung negativer Steifigkeiten wird in Abschnitt 3.4 untersucht. Mit den Federsteifigkeiten aus Gleichung (3.44) kann elastisches, vollständig isotropes Material in einem DEM Modell abgebildet werden. Die Anwendbarkeit und Güte des Modells wird in den folgenden Abschnitten validiert.

3.3 Validierung

In den folgenden Abschnitten werden zwei ausgewählte Strukturen, für die eine Referenzlösung vorliegt, mit einer Lösung des DEM Modells verglichen. Der Einfluss der Modellgröße sowie die kritischen Zeitschrittweiten werden herausgearbeitet und bewertet. Ziel ist die Sicherstellung der Eignung des Modells hinsichtlich der Berechnung von Festkörpern unter verschiedenen äußeren Einwirkungen.

3.3.1 Würfel

Als erstes Beispiel wird ein Würfel untersucht. Es werden drei unterschiedliche Spannungszustände aufgebracht, um das vollständig isotrope Verhalten zu validieren. In Abschnitt 3.3.1.4 wird am Beispiel des Würfels auf die kritische Zeitschrittweite von Simulationen hochfester Materialien eingegangen.

3.3.1.1 Einachsiale Spannung

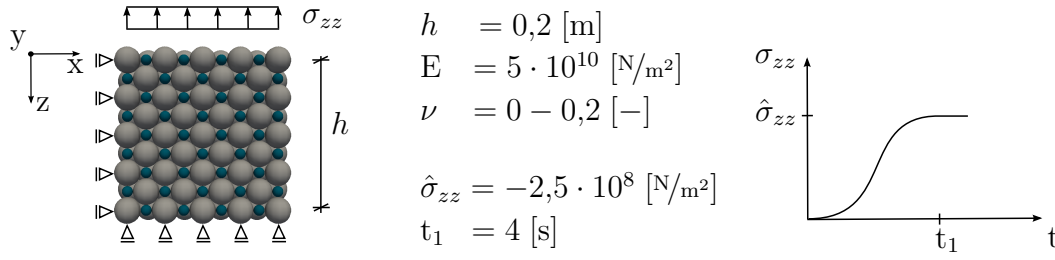


Bild 3.7: UHPC-Würfel unter quasistatischer einachsialer Spannung

Der Würfel wird in der ersten Belastungssituation zwängungsfrei an drei Seiten jeweils in der Flächennormalenrichtung gelagert und einachsial mit einer Druckspannung in z-Richtung belastet. Die Lagerung erfolgt durch ein zu null Setzen der entsprechenden Beschleunigung aller Partikel der hexagonalen Schichten des Randes nach der Auswertung der Bewegungsgleichungen. Das dadurch entstehende Ungleichgewicht am Partikel entspricht der jeweiligen Auflagerkraft. In Abbildung 3.7 ist der Würfel bestehend aus vier Einheitszellen in jede Richtung (729 Partikel) dargestellt. Da eine Simulation mit der DEM immer im Zeitbereich erfolgt, wird die Last mit einer kubischen Verlaufsfunktion langsam gesteigert, um eine dynamische Anregung zu vermeiden. Nachdem die Last vollständig aufgebracht ist, wird ein kurzer Zeitraum unter konstanter Spannung simuliert, um eventuell aufgetretene Schwingungen abklingen zu lassen.

Bei der vorliegenden zwängungsfreien Lagerung lautet die analytische Referenzlösung für die Verzerrungen, nach vollständiger Lastaufbringung,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{zz,ref} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} = -5 \cdot 10^{-3} [-] \quad \text{sowie} \\ \varepsilon_{xx,ref} &= \varepsilon_{yy,ref} = -\nu \varepsilon_{zz,ref} . \end{aligned} \quad (3.45)$$

Die Diagramme 3.8 und 3.9 zeigen das Ergebnis der Verzerrungen für verschieden viele Einheitszellen bzw. Partikel. Die Verzerrungen der DEM Lösung werden über die gemittelten Partikelverschiebungen des Randes bezogen auf die Kantenlänge definiert. In den Abbildungen 3.8 und 3.9 ist die Konvergenz der Ergebnisse gegen die Referenzlösung aus Gleichung (3.45) dargestellt. Für jede Verfeinerung durch Halbieren der Partikelgröße verringert sich der relative Fehler um eine halbe Größenordnung. In Diagramm 3.9 sind die Absolutwerte der transversalen Verzerrungen angegeben, da für die Referenzlösung bei $\nu = 0$ eine Darstellung der Relativfehler nicht möglich ist. Die Lösung für unterschiedliche Querdehnzahlen streben jeweils gegen den auf der y-Achse aufgetragenen Referenzwert.

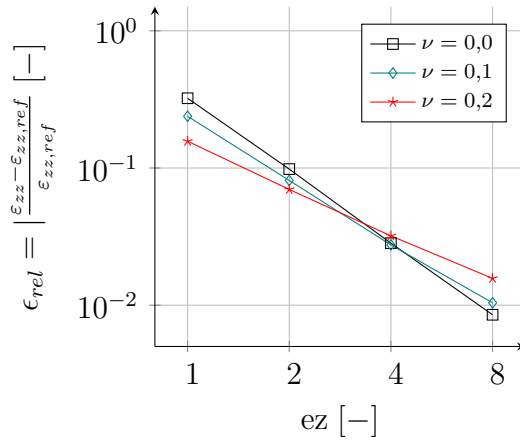


Bild 3.8: Relativer Fehler der Verzerrungen ε_{zz}

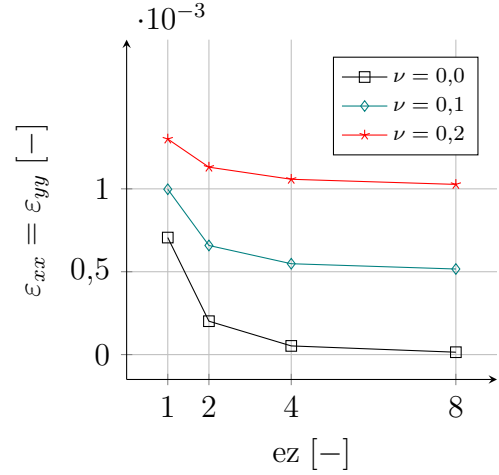


Bild 3.9: Transversale Verzerrungen ε_{xx} und ε_{yy}

Fehler in der Lösung der Berechnung haben mehrere Ursachen. Neben den numerisch bedingten Fehlern, die in Abschnitt 2.4 dargestellt sind, gibt es Modellfehler. Alle Überlegungen in den Herleitungen sind am unverformten System gemacht worden. Die Richtungen der Kontakte innerhalb der Packungslage verändern sich jedoch während der Simulation durch die Verzerrung der Strukturen. Da eine Simulation mit der DEM immer im Zeitbereich erfolgt und in jedem Zeitschritt die neue Referenzkonfiguration des vorangegangenen Zeitschrittes gilt, können Fehler bei großen Verzerrungen bzw. stark veränderten Konfigurationen auftreten. Während große Verschiebungen aufgrund der Betrachtungsweise möglich sind, basiert die DEM auf der Annahme, dass die Überlappungen der Partikel klein gegenüber der Radii sind. Es werden also kleine Verzerrungen vorausgesetzt.

Ein weiterer Modellfehler sind die Kanten und Ecken des Würfels. Die Modellparameter aus Abschnitt 3.2.3 wurden für das Materialgebiet hergeleitet. An Rändern ergeben sich jedoch Abweichungen zum Elastizitätstensor des Kontinuums. Eine genauere Untersuchung der Ränder erfolgt in Abschnitt 3.4. Als weitere mögliche Fehlerquelle sind die Rotationsfreiheitsgrade der Partikel zu nennen. Diese sind in der klassischen Kontinuumsmechanik nicht vorhanden und somit für das daran hergeleitete diskrete Festkörpermodell auch nicht notwendig. Da die Rotationen für die Kontaktmechanik der granularen Medien und damit auch für den Kontakt von aufgebrochenen Festkörpern, siehe Kapitel 4, wichtig sind, werden diese auch im DEM Modell für Festkörper berücksichtigt. Der Einfluss und die Auswirkungen der Mitnahme dieser zusätzlichen Freiwerte werden in Abschnitt 3.4.4 untersucht. Vergleicht man die Graphen für $\nu = 0,0$ und $\nu = 0,2$ in Abbildung 3.8, wird deutlich, dass sich der maßgebliche Fehler bei Verfeinerung der Einheitszellen ändert, da die Graphen sich schneiden. Werden die Rotationsfreiheitsgrade vernachlässigt, tritt dieser Effekt nicht auf, siehe Abschnitt 3.4. Die Rotationsfreiheitsgrade haben demnach vor allem für grobe Auflösungen des Kontinuums einen großen Anteil am Fehler. Eine genauere Betrachtung erfolgt in Abschnitt 3.4.4.

3.3.1.2 Schubspannung

Als zweiter Belastungszustand wird eine reine Schubspannung auf den Würfel aufgebracht, um den Eintrag \hat{C}_3 des Elastizitätstensors anzusprechen. Der reine Schubzustand wird erreicht, in dem der Würfel an der Unterseite in alle Richtungen gehalten und auf drei Seiten entsprechend Abbildung 3.10 belastet wird. Für die Spannungen gilt $\sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \tau_{xz} = 2,5 \cdot 10^8 \text{ [N/m}^2\text{]}$. Auch in diesem Beispiel wird die Last mit einer Verlaufsfunktion gesteigert, um eine quasistatische Belastungssituation zu erreichen.

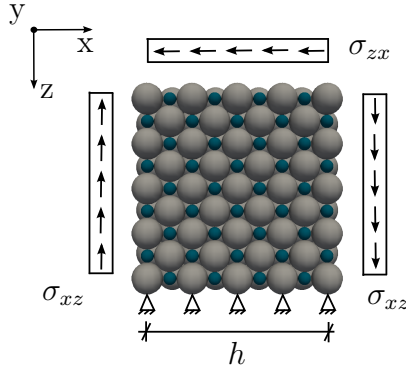


Bild 3.10: UHPC-Würfel
quasistatischer
Schubbeanspruchung

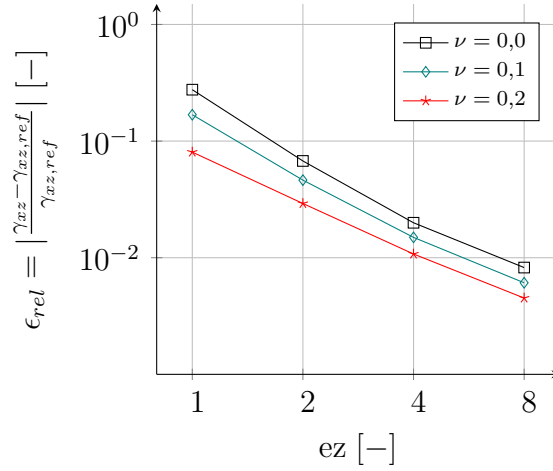


Bild 3.11: Relativer Fehler der Schub-
verzerrungen γ_{xz}

Die Referenzlösung für die Schubverzerrungen,

$$\gamma_{xz,ref} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xz} = 10^{-2} (1+\nu) \quad , \quad (3.46)$$

ist abhängig von der Querdehnzahl. Der relative Fehler für verschiedene Querdehnzahlen ist im Diagramm 3.11 angegeben. Die Ergebnisse konvergieren für eine feinere Auflösung des Würfels gegen die Referenzlösung.

3.3.1.3 Mehrachsialer Spannungszustand

Die dritte Belastungssituation ist ein mehrachsialer Druckzustand nach Abbildung 3.12. Hierbei wird in den drei Raumrichtungen jeweils eine Spannung $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -2,5 \cdot 10^8 \text{ [N/m}^2\text{]}$ aufgegeben. Die Referenzlösung für die Verzerrungen nach vollständiger Lastaufbringung,

$$\varepsilon_{zz,ref} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu \sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu \sigma_{xx}}{E} = -5 \cdot 10^{-3} (1 - 2\nu) , \quad (3.47)$$

setzt sich aus den drei Spannungsanteilen zusammen und ist für alle Raumrichtungen gleich. Der relative Fehler für ε_{zz} ist in Abbildung 3.13 angegeben.

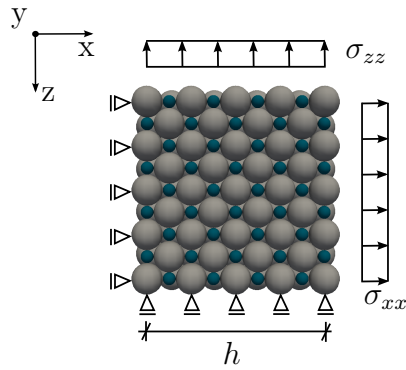


Bild 3.12: UHPC-Würfel bei quasisistatischer dreiachsialer Spannung

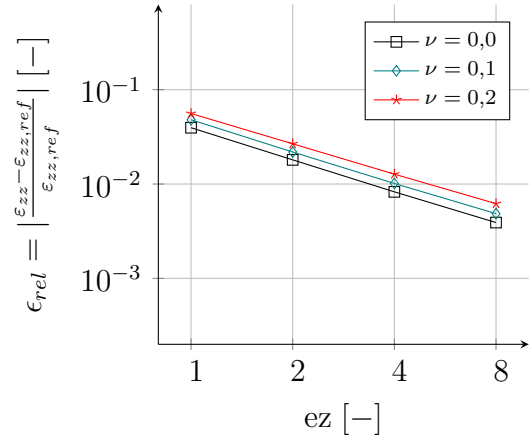


Bild 3.13: Relativer Fehler der Verzerrungen $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy}$

Durch die gleichförmige Belastung in allen drei Achsen entstehen an den Kanten und Ecken des Würfels geringere abtreibende Wirkungen aus geometriebedingten Schubkräften (siehe Abschnitt 3.4), sodass diese Stellen einen geringeren Einfluss auf den Gesamtfehler haben. Das Fehlerniveau ist dadurch insgesamt niedriger und das Ergebnis konvergiert für feinere Auflösungen des Kontinuums gegen die Referenzlösung.

Das Modell ist in der Lage ein- und mehrachsiale sowie Schubspannungen für linear elastisches, vollständig isotropes Material abzubilden. Das Verhalten bei großen Verschiebungen sowie Rotationen wird in Abschnitt 3.3.2 untersucht.

3.3.1.4 Kritische Zeitschrittweiten

Die kritische Zeitschrittweite für das verwendete Lösungsverfahren ist in Abschnitt 2.4.4 angegeben. Folgendes Diagramm 3.14 gibt einen Überblick über die kritischen Zeitschrittweiten für verschiedene Materialsteifigkeiten und Partikelgrößen für den Würfel aus den vorangegangenen Abschnitten.

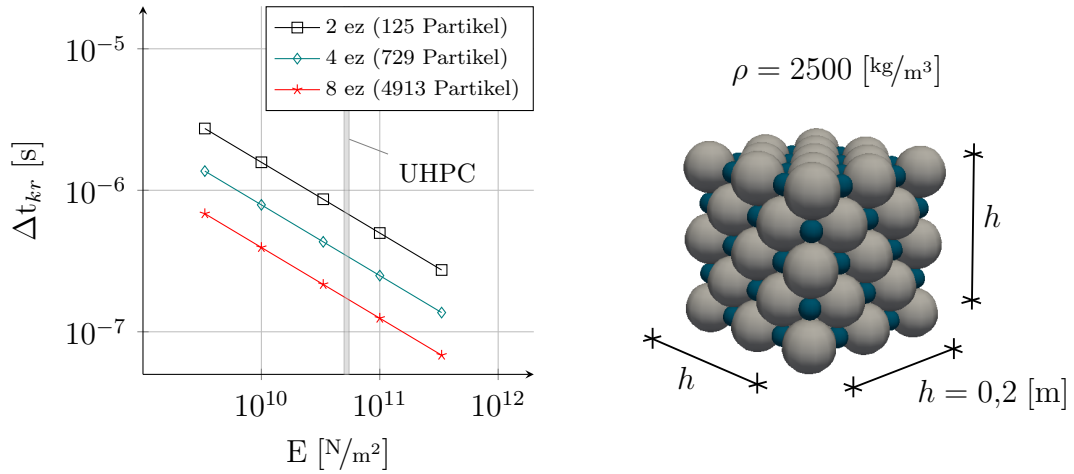


Bild 3.14: Kritische Zeitschrittweiten für unterschiedliche E-Moduli und Partikelgrößen

Das Diagramm 3.14 zeigt, dass für hochfeste Materialien wie UHPC die erforderliche Zeitschrittweite für eine feinere Auflösung des Kontinuums sehr gering wird. Δt_{kr} ist aufgrund der hohen Steifigkeit des Materials sehr niedrig und linear abhängig vom Radius der Partikel. Die Simulation von großen Zeitspannen ist deswegen nur bedingt möglich. Für quasistatische Belastungen von Festkörpern kann ein Hochskalieren der Masse die Frequenz verringern und damit größere Zeitschritte ermöglichen, siehe z.B. CUNDALL [14]. In den folgenden Kapiteln wird jedoch auch das Nachbruchverhalten von Beton untersucht. Die Einflüsse aus Trägheit sind bei diesen Prozessen von großer Bedeutung und eine numerisch motivierte Erhöhung der Massen würde die Ergebnisse unbrauchbar machen. Der Zeitraum, der bei diesen Simulationen untersucht werden kann, ist also durch die sehr kleinen Zeitschritte begrenzt. Zum Einen wird der Berechnungsaufwand sehr groß und zum Anderen kommen bei einer hohen Anzahl an Zeitschritten Effekte der Rechnerungenauigkeit zum Tragen, siehe Abschnitt 2.4.3.

Die Verwendung einer feineren Auflösung des Kontinuums führt aufgrund der kleineren Frequenzen im System zu kleineren Zeitschritten. Hierbei gilt ein linearer Zusammenhang

$$\Delta t \propto r, \quad (3.48)$$

zwischen dem Radius und der maximalen Zeitschrittweite. Zusätzlich vervielfachen sich die Anzahl der auszuwertenden Kontakte und Partikel in jedem Zeitschritt. Der Berechnungsaufwand steigt also für eine gegebene Struktur bei ansteigender Feinheit ez mit einem Faktor

$$\zeta \propto ez^4 \quad (3.49)$$

an. Während die Auswertung vieler Kontakte und Partikel in einem Zeitschritt durch Parallelisieren der Kontaktauswertung gut skalierbar ist, erhöhen zusätzliche Zeit-

schritte durch die Verringerung von r bzw. Δt den Berechnungsaufwand maßgeblich. Während die Zeitskala sequentiell ablaufen muss, kann die räumliche Skala parallelisiert werden werden, da die DEM mit einem expliziten Lösungsverfahren keine Lösung eines Gleichungssystem erfordert. Es gilt also das Material nur so fein wie es für die Abbildung der Phänomene der untersuchten Skala notwendig ist auf Partikel zusammenzufassen, um längere Zeitbereiche untersuchen zu können.

3.3.2 EULER Elastica

Jakob BERNOULLI formulierte die Fragestellung der Elastica erstmalig 1691 und stellte 1692 eine erste Lösung vor, die er 1694 publizierte. Erst 1742 diskutierte Daniel BERNOULLI in [4] mit EULER über Variationsrechnung, was zu EULERS Veröffentlichung über die Elastica 1744 führte. Aufbauend auf die Werke der Bernoullis stellte er seine Lösung im Anhang von [25] vor. Die Elastica werden heute in der Regel mit dem Namen EULER in Verbindung gebracht, obwohl Jakob BERNOULLI bereits 50 Jahre eher bei den Gleichungen für die Lösung angekommen war.

Einer der bekanntesten Fälle der Elastica ist der „Pin-Pin Elastica“. Der zweiseitig gelenkig gelagerte, auch als EULER Knickstab bekannte Fall, wird in diesem Abschnitt untersucht. Das vollständig geometrisch nichtlineare Verhalten der Elastica bietet eine gute Möglichkeit, das DEM Modell hinsichtlich großer Verschiebungen bzw. Rotationen zu validieren. Aufgrund der aktualisierten LAGRANGE'schen Betrachtungsweise der DEM hat die Methode für Strukturen keine Begrenzungen für Verschiebungen oder Rotationen. Um dies zu überprüfen, wird der Elastica-Stab aus Abbildung 3.15 mit insgesamt $2 \cdot 4 \cdot 60 = 480$ Einheitszellen und damit 5445 Partikeln aufgelöst und geschwindigkeitsgesteuert in seiner Längsachse belastet.

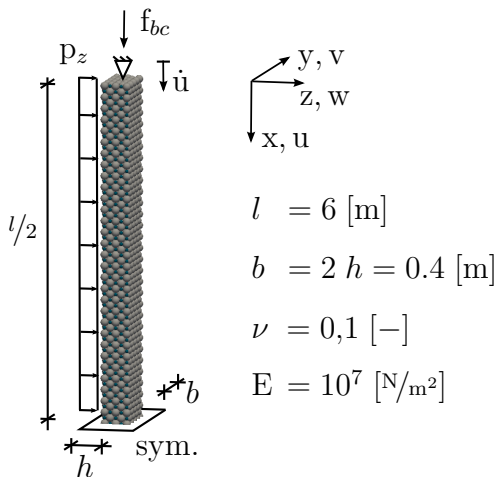


Bild 3.15: „Pin-Pin EULER Elastica“

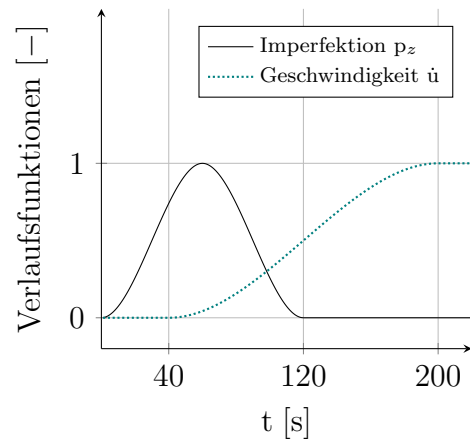


Bild 3.16: Verlaufsfunktionen

Zu Beginn der Berechnung wird eine Imperfektion entlang der Stabachse, in Form einer Linienlast in z -Richtung, aufgebracht, um ein schlagartiges Eigenwertknicken zu verhindern. Die Bewegung in Stablängsachse beginnt bei $t = 40$ [s]. Zu diesem

Zeitpunkt wurde die Imperfektion fast vollständig aufgebracht, um einen stetigen Übergang der Belastungen zu schaffen. Die Imperfektionslast wird, nachdem der Knickvorgang begonnen hat, wieder abgebaut, um die Ergebnisse für die seitliche Auslenkung nicht zu beeinflussen. Die Verlaufsfunktionen der Belastungen sind im Diagramm 3.16 dargestellt. Ab dem Erreichen der maximalen Belastungsgeschwindigkeit von $\dot{u} = 0,075 \text{ [m/s]}$ bei $t = 200 \text{ [s]}$ bleibt diese bis zum Ende der Simulationszeit $t_{max} = 300 \text{ [s]}$ konstant.

Die Lagerungen an den Stabenden werden während der Simulation insgesamt um die 2,4-fache Stablänge aufeinander zu bewegt und durchdringen sich somit. Ein möglicher Kontaktvorgang beim Aufeinandertreffen der Lager wird hier ausgeschlossen, indem nur initial verbundene Kontakte berücksichtigt werden. Kollisionen werden nicht aufgesucht bzw. ausgewertet. Diese Vereinfachung macht aus der Aufgabe zunächst ein zweidimensionales System in der x-z-Ebene. Das Diagramm 3.17 zeigt die seitliche Auslenkung w des Stabes, aufgetragen über die achsiale Verschiebung u in x-Richtung.

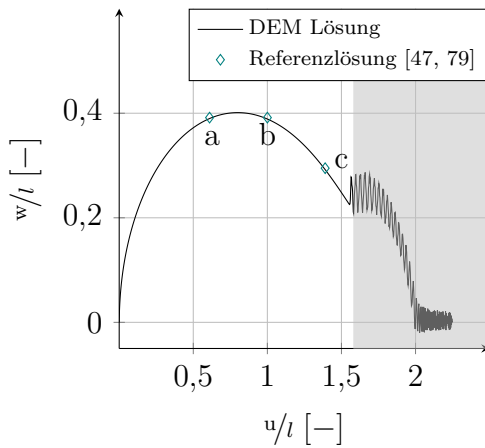


Bild 3.17: Seitliche Auslenkung

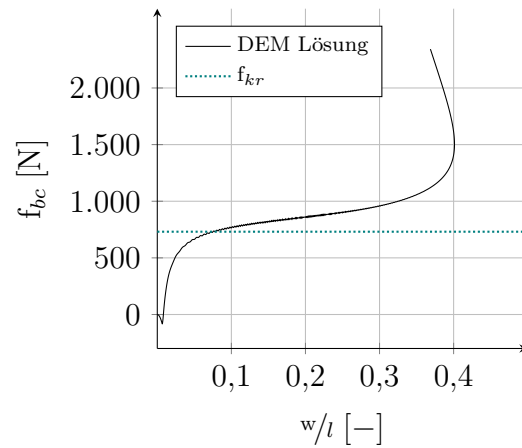


Bild 3.18: Vertikale Lagerkraft

Die Referenzlösung für einzelne Verformungszustände im überkritischen Bereich nach TIMOSHENKO und GERE [79] oder KUZNETSOV und LEVYAKOV [47] sind als Punkte im Diagramm 3.17 angegeben und stimmen sehr gut mit den Ergebnissen der DEM-Simulation überein. Kleine Abweichungen im Diagramm resultieren aus der Schubweichheit des DEM-Modells, da die Referenzlösungen absolute Schubstarrheit bzw. reine Biegetragwirkung voraussetzen. Der Einfluss der Schubweichheit des gewählten Querschnitts auf das Verformungsverhalten ist jedoch sehr gering. Die Zustände der Verformung zu den Referenzpunkten a, b und c sind in Abbildung 3.19 dargestellt.

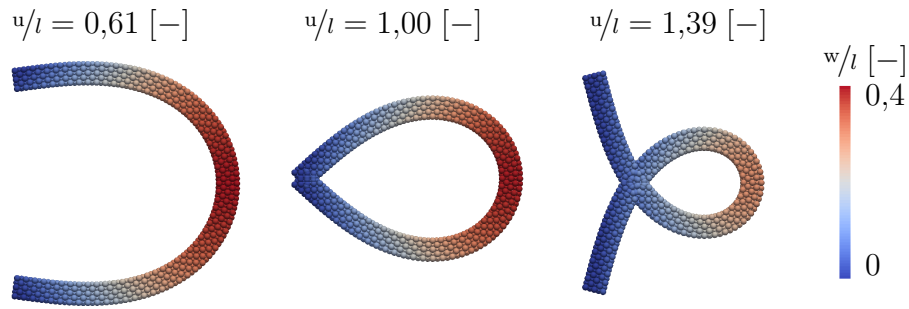


Bild 3.19: Verformung der „Pin-Pin EULER Elastica“ im überkritischen Bereich

Das Diagramm 3.18 zeigt die Lagerkraft an den Stabenden während der Simulation. Das destabilisierende nichtlineare Verhalten beim Erreichen der Knicklast

$$f_{kr} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} \quad (3.50)$$

ist erkennbar. Die Lagerkraft geht erwartungsgemäß über diesen Wert hinaus und steigt nichtlinear an, da große Verschiebungen und Rotationen abgebildet werden können. Zu Beginn der Simulation ist die Lagerkraft von der Imperfektionslast beeinflusst. Aufgrund des Einhängens des Stabes entstehen auch Zugkräfte in den Lagern, die jedoch mit dem Beginn der Längsbelastung überdrückt werden, bis die Imperfektionslast wieder abgebaut wird.

Im grau hinterlegten Bereich des Diagramms 3.17 kommt es am Ende der Simulation zu einer Anregung der Struktur. Diese resultiert aus einem sekundären Stabilitätsversagen des Stabes in y-Richtung, welches in Abbildung 3.20 dargestellt ist. Da für diese Eigenform keine Imperfektion aufgebracht wurde, ist der Knickvorgang schlagartig und versetzt die Struktur in eine freie Schwingung. Abbildung 3.21 zeigt die seitlichen Auslenkungen in y- Richtung des Stabes.

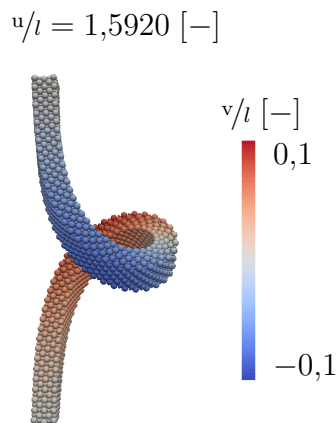


Bild 3.20: Sekundäres Stabilitätsversagen

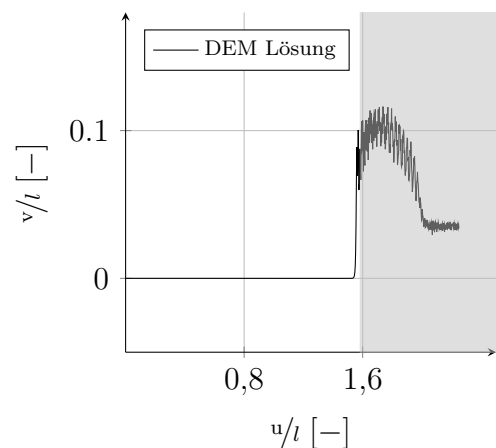


Bild 3.21: Seitliche Auslenkung in y-Richtung

Die Verschiebungen v in der Mitte sind 0, da die sekundäre Versagensform punktsymmetrisch ist. Als repräsentative Punkte für die seitlichen Verschiebungen sind deshalb in y -Richtung die Drittelpunkte gewählt.

In einem zweiten Beispiel erfolgt nun eine realitätsnähere Betrachtung der „Pin-Pin EULER Elastica“. Es wird berücksichtigt, dass die Enden des Stabes kollidieren könnten, wenn der Stab um seine komplette Länge überdrückt wird. Um den Kontakt zu vermeiden und gleichzeitig ein unphysikalisches Durchdringen auszuschließen, werden die Enden in diesem Beispiel aneinander vorbeigeführt. Die geschwindigkeitsbasierte Belastung aus Abbildung 3.16 wird dahingehend erweitert, dass die Endpunkte während der vertikalen Bewegung um die Stablänge von 6 [m] auch eine horizontale Bewegung in y -Richtung um 0,25 [m] (oben) bzw. $-0,25$ [m] (unten) erfahren.

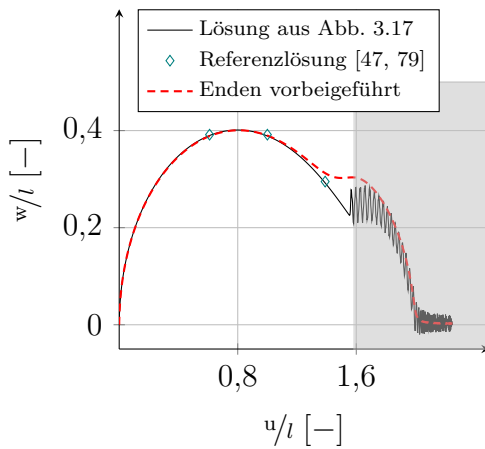


Bild 3.22: Seitliche Auslenkung in z -Richtung

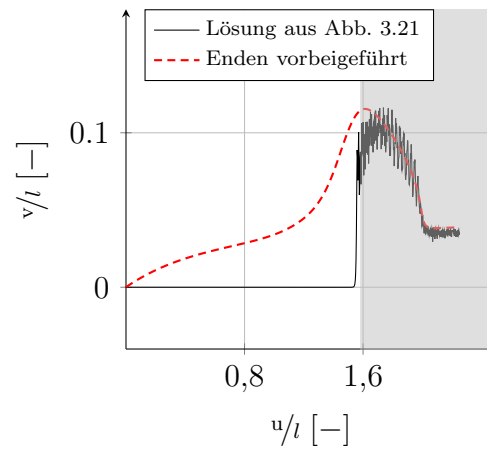


Bild 3.23: Seitliche Auslenkung in y -Richtung

Das Ergebnis für die Auslenkungen in z - und y -Richtung, aufgetragen über die vertikale Verschiebung, ist in den Abbildungen 3.22 und 3.23 dargestellt. Zum Vergleich ist das Ergebnis aus der Simulation mit unphysikalischer Durchdringung des Stabes angegeben. Diagramm 3.22 zeigt, dass sich das Ergebnis in z -Richtung aufgrund des Vorbeiführens dahingehend ändert, dass das sekundäre Versagen nicht mehr spontan auftritt. Durch das seitliche Vorbeiführen in y -Richtung erfolgt das Ausweichen ohne dynamische Anregung. Die Verschiebungen in y -Richtung werden stärker vom Vorbeiführen der Enden beeinflusst. Hier ergeben sich ab Beginn der Belastung größere Verschiebungen.

Zu welchem Belastungszeitpunkt die sekundäre Eigenform angesprochen wird, hängt von mehreren Faktoren ab. Maßgeblichen Einfluss hat die Torsionssteifigkeit des Querschnittes, da der Stab von einer reinen Biegeform in eine gemischte Biege-Torsions-Verformung übergeht. Eine Erhöhung der Querdehnzahl hat eine Verringerung des Schubmoduls und damit auch der Torsionssteifigkeit zur Folge. Demnach wird die sekundäre Versagensform für höhere Querdehnzahlen früher angesprochen. Die Ergebnisse hierfür sind in den Abbildungen 3.24 und 3.25 dargestellt.

Die Variation von ν zeigt, dass der Einfluss der Schubsteifigkeit zwar für den Beginn der Simulation, bei dem lediglich das primäre Stabilitätsversagen angesprochen wird, sehr gering ist. Kommt jedoch die zweite, gemischte Verformung zum Tragen, steigt der Einfluss der Querdehnzahl. Die in Abschnitt 3.2.3 gezeigte, optimierte Einheitszelle mit isotropiefreien Schubtermen im Elastizitätstensor, ermöglicht die Schubeinflüsse korrekt zu berücksichtigen und damit eine Verbesserung der Lösung gegenüber der Referenz. Damit ist das DEM Modell in der Lage komplexe Tragwirkungen und Verformungszustände mit großen Rotationen und Verschiebungen hervorragend abzubilden.

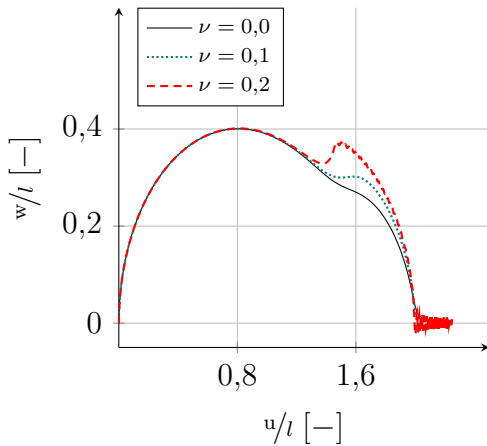


Bild 3.24: Seitliche Auslenkung in z-Richtung für verschiedene ν

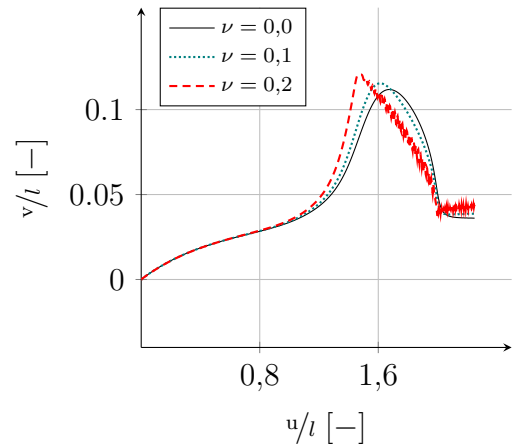


Bild 3.25: Seitliche Auslenkung in y-Richtung für verschiedene ν

3.4 Besonderheiten des gewählten DEM-Modells

In Abschnitt 3.2.3 werden die Modellparameter anhand der Einheitszelle aus Abbildung 3.6 ermittelt. Die Einheitszelle stellt einen Ausschnitt aus dem Gebiet des Kontinuums bzw. Diskontinuums dar und gilt nicht für dessen Randbereiche. In den folgenden Abschnitten wird für das Beispiel des Würfels aus den Abschnitten 3.3.1.1 bis 3.3.1.4 die Energiedichte innerhalb sowie in den Randbereichen des Gebietes ermittelt und der resultierende Fehler an den Rändern untersucht. Des weiteren beinhaltet der DEM Ansatz Rotationsfreiheitsgrade, die in der Theorie des Kontinuums, welches der Herleitung zu Grunde liegt, nicht vorhanden sind. Der Einfluss der Rotationen wird in Abschnitt 3.4.4 untersucht.

3.4.1 Energiedichte im Gebiet

Die Energiedichte in der Einheitszelle entspricht der Energiedichte im Kontinuum. Um die folgenden Überlegungen vergleichbar zu machen, kann die Energiedichte auch um ein innenliegendes Partikel herum ermittelt werden. Anstelle der gesamten

Einheitszelle wird nur der unmittelbare Bereich um ein Partikel herum betrachtet. Ein vollständig umschlossenes Partikel der kubisch dichtesten Packungslage hat zwölf Nachbarpartikel und sechs benachbarte Oktaederlücken. Wird die gespeicherte Energie dieser Kontakte nach Gleichung (3.40) summiert, muss berücksichtigt werden, dass die Federn zwischen den hexagonal angeordneten Partikeln nur zur Hälfte berücksichtigt werden, da nur der halbe Kontakt zur Energiedichte um das betrachtete Partikel beiträgt. Die Kontakte mit den Oktaederlücken werden hingegen voll angesetzt, da es sich um getrennte Kontakte handelt. Das Ergebnis ist die gespeicherte Energie um ein Partikel. Wird die Energiedichte auf den Volumenanteil, den das Partikel in der Dichtesten Packungslage einnimmt, bezogen, folgt die Energiedichte

$$e_{in} = \frac{\Pi_{in}}{4\sqrt{2}r^3} \quad (3.51)$$

um ein innenliegendes Partikel. Das Differenzieren von e_{in} nach den Verzerrungen führt erwartungsgemäß auf denselben Elastizitätstensor wie in Abschnitt 3.2.3 mit den Einträgen aus Gleichung (3.41). Die Einheitszelle entspricht also dem innenliegenden Partikel bzw. dem Inneren des Materialgebietes.

3.4.2 Energiedichte in Randbereichen

Die Kanten-, Eck- und Außenflächenpartikel des Würfels haben nicht die 18 Nachbarpartikel eines Innenliegenden. Demzufolge könnte sich die Energiedichte an diesen Punkten anders zusammensetzen und zu einem Materialverhalten führen, dass nicht dem vorausgesetztem Elastizitätstensor folgt.

Wertet man die Energiedichte im Außenflächenbereich aus, ergibt sich derselbe Elastizitätstensor wie im Inneren des Würfels. Die Hälfte der Kontakte existiert und das repräsentative Volumen um ein Außenpartikel ist ebenfalls halb so groß. Die Tensoreinträge nach dem Ableiten der Energiedichte e_{af} sind identisch wie zuvor. Für Partikel an den Außenkanten und -ecken hingegen ergeben sich zusätzlich asymmetrische Anteile. Abbildung 3.26 veranschaulicht, dass z.B. der Kontakt C^{26} zwischen den Partikeln 2 und 6 im Außenkantenbereich keinen symmetrischen Gegenpart hat.

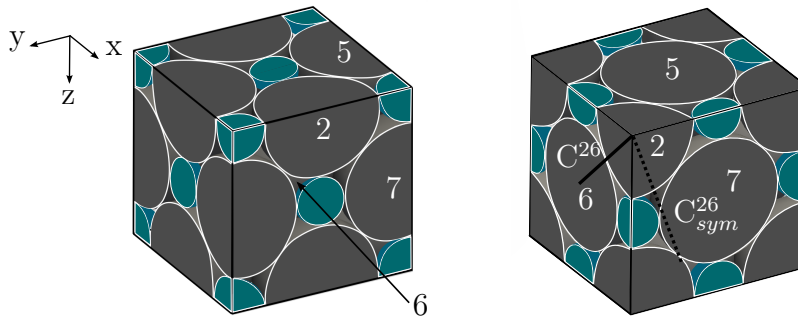


Bild 3.26: Partikel 2 an der Kante eines Würfels

Daraus ergeben sich unphysikalische Terme auf den Nebendiagonalen des Elastizitätstensors. Die Ermittlung der Energiedichte e_{ak} um das Partikel 2 der Außenkante

und das Ableiten nach den Normalverzerrungen ε_{xx} und ε_{zz} oder den Schubverzerrungen ε_{xz} bzw. ε_{zx} ,

$$\frac{\partial e_{ak}}{\partial \varepsilon_{xx}} = \frac{\sqrt{2}}{4r} ((4k_n + 2k_s)\varepsilon_{xx} + (k_n - k_s)(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) \quad (3.52)$$

$$+ k_n(\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx}) + k_s(\varepsilon_{zx} - \varepsilon_{xz})) ,$$

$$\frac{\partial e_{ak}}{\partial \varepsilon_{zz}} = \frac{\sqrt{2}}{4r} ((4k_n + 2k_s)\varepsilon_{zz} + (k_n - k_s)(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) \quad (3.53)$$

$$+ k_n(\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx}) + k_s(\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{zx})) ,$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial e_{ak}}{\partial \varepsilon_{xz}} + \frac{\partial e_{ak}}{\partial \varepsilon_{zx}} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4r} ((k_n + k_s + k_{okt})(\varepsilon_{xz} + \varepsilon_{zx}) \quad (3.54)$$

$$+ k_n(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})) ,$$

ergibt dieselben Terme für \hat{C}_1 bis \hat{C}_3 wie in der Mitte oder an der Außenfläche. Es entstehen jedoch zusätzliche Anteile,

$$\hat{C}_4 = \frac{\sqrt{2}}{4r} k_n , \text{ in} \quad (3.55)$$

$$\mathbb{C}_{DEM} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \hat{C}_2 & \hat{C}_4 \\ \hat{C}_2 & \hat{C}_1 & \hat{C}_2 & \\ \hat{C}_2 & \hat{C}_2 & \hat{C}_1 & \hat{C}_4 \\ & & \hat{C}_3 & \\ \hat{C}_4 & & \hat{C}_4 & \hat{C}_3 \\ & & & \hat{C}_3 \end{bmatrix} , \quad (3.56)$$

die die Schubverzerrungen mit den Normalverzerrungen koppeln. Anschaulich bedeuten die Terme ein Abgleiten der Kanten unter achsialen Spannungen. Für Ecken, an denen hexagonal angeordnete Partikel sind, wie beispielsweise rechts in Abbildung 3.26 dargestellt, entstehen diese Terme in allen Raumrichtungen, da hier drei Kontakte (C^{25} , C^{26} und C^{27}) ohne symmetrischen Nachbarkontakt existieren.

Die Einträge \hat{C}_4 in \mathbb{C}_{DEM} haben Auswirkungen auf das Verhalten der Partikel an den Rändern. Es entsteht ein Fehler in der Partikelbewegung und damit der Würfelverformung. Für geringe Querdehnzahlen ist der Einfluss klein und kann zudem über eine Verfeinerung weiter minimiert werden. Für steigende Querdehnzahlen wird der Fehler größer und kann zusätzlich bei Querdehnzahlen $\nu > 0,2$ zu Instabilitäten führen. Um lediglich den Einfluss der Fehler durch die Einträge im Elastizitätstensor zu untersuchen, sind die Rotationen der Partikel in diesem Abschnitt deaktiviert. Die Untersuchung dieser zusätzlichen Freiheitsgrade ist in Abschnitt 3.4.4 dargestellt.

In Abbildung 3.27 ist der Fehler für die Verzerrungen eines Würfels über verschiedene Querdehnzahlen abgetragen. Man erkennt, dass der Fehler für höhere Werte von ν stark ansteigt, bis hin zu einem Wert von $\nu = 0,24$, ab dem keine Lösung mehr gefunden werden kann, da das System instabil wird. Betrachtet man die lokalen Steifigkeitsmatrizen eines Partikels im Kanten- oder Eckbereich des Würfels, so haben

diese, im Gegensatz zu den Steifigkeitsmatrizen im Gebiet, Nebendiagonaleinträge. Die Steifigkeitsmatrix für die Bewegung des Partikels 2 an der Außenkante ist

$$\mathbf{K}_{ak} = \begin{bmatrix} 1,5 k_n + 2 k_s + k_{okt} & -0,5(k_n - k_s) \\ -0,5(k_n - k_s) & 1,5 k_n + 2 k_s + k_{okt} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

Trägt man die Determinanten der lokalen Steifigkeitsmatrizen für einen normierten Elastizitätsmodul und Radius über eine veränderliche Querdehnzahl auf, wird der Einfluss der Nebendiagonalen deutlich. Abbildung 3.28 zeigt die Determinanten der lokalen Steifigkeitsmatrizen in den verschiedenen Bereichen des Würfels.

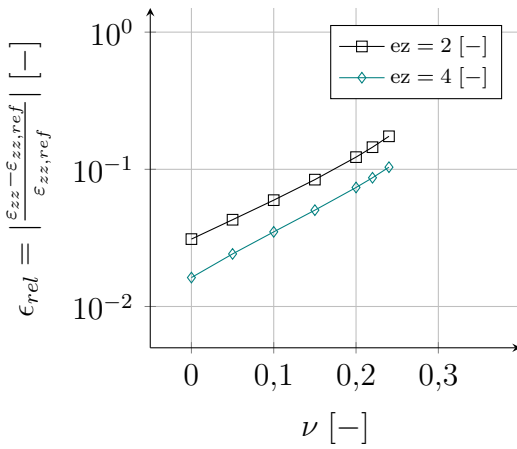


Bild 3.27: Fehler in Abhängigkeit von ν

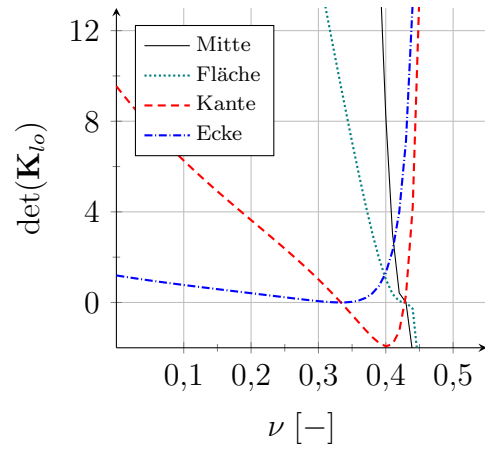


Bild 3.28: Determinanten der lokalen Steifigkeitsmatrizen in Abhängigkeit von ν

Die Steifigkeitsmatrizen in den Kanten und Ecken haben gegenüber den Mittel- und Außenflächenpartikeln bei $\nu = 1/3$ einen zusätzlichen Nulldurchgang in ihren Determinanten. Ein Gleichungssystem der Steifigkeitsmatrizen des Würfels wäre nicht lösbar. Dies führt auch im Lösungsverfahren der DEM mit ungekoppelten Gleichungen zu Instabilitäten und damit zu keiner Lösung. Die Instabilitäten setzen bereits bei einer Querdehnzahl von $\nu = 0,24$ ein. Eine Obergrenze für ν liegt also nicht bei $\nu = 0,2$, wenn die Scherfedern negative Werte erhalten, sondern geht darüber hinaus. Die Grenze ist abhängig von der Geometrie des Modells und gilt nur für eine Simulation ohne Rotationsfreiheitsgrade.

Im folgenden Abschnitt 3.4.3 wird eine Methode vorgestellt, wie die Randbereiche des Modells so modifiziert werden können, dass die Einträge in \mathbb{C}_{DEM} korrigiert und der Fehler minimiert werden kann. In der Folge ändern sich auch die lokalen Steifigkeitsmatrizen am Rand. Die Obergrenze für ν kann jedoch nur leicht erhöht werden.

3.4.3 Modifikation des Elastizitätstensors

Um für die Randbereiche von Strukturen die Kopplungsterme im Elastizitätstensor aus Gleichung (3.56) zu eliminieren, muss eine Symmetrie für die Randpartikel geschaffen werden. Hierfür werden an dieser Stelle virtuelle gespiegelte Kontakte definiert. Der Kontakt C^{26} wird, wie in Abbildung 3.29 dargestellt, an der Kante drei mal gespiegelt. Zwei Spiegelungen werden in Richtung der Außenflächen und eine Punktspiegelung wird um die Kante erstellt.

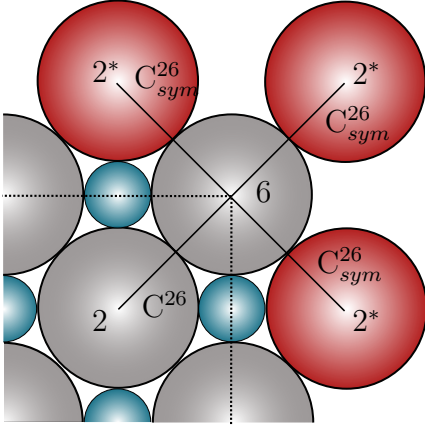


Bild 3.29: Gespiegelte Kontakte im Kantenbereich

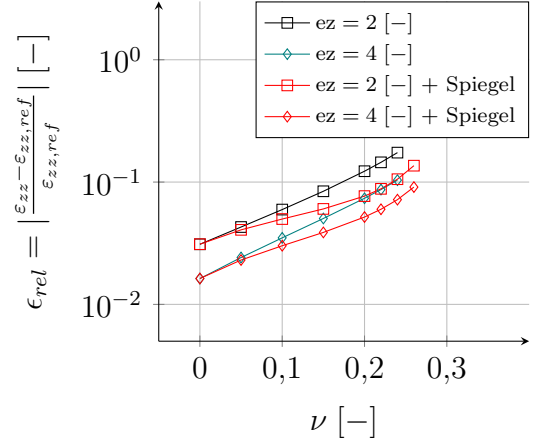


Bild 3.30: Fehler in Abhängigkeit von ν

Die gespiegelten Kontakte C^{26}_{sym} werden jeweils zwischen dem Partikel 6 der Kante sowie einer Kopie des Partikels 2 ausgewertet. Um keine zusätzliche Steifigkeit in das System zu integrieren, sondern lediglich eine Symmetrie herzustellen, wird die Steifigkeit des Kontaktes C^{26} geviertelt und damit auf die vier Kontakte verteilt. Wertet man nun die Energiedichte im Bereich um das Partikel 6 aus, erhält man denselben Elastizitätstensor ohne die Kopplungsterme \hat{C}_4 wie im Inneren des Würfels. Eine Reduktion der Steifigkeit des Kontaktes wirkt sich jedoch auch auf die Energiedichte um das Partikel 2 aus. Durch das Wegfallen von drei Vierteln der Steifigkeit des Kontaktes zu Partikel 6 würde hier erneut eine Assymetrie entstehen und das Problem damit nur ins Innere des Würfels verlagert werden. Um dies zu vermeiden, wird der Kontakt C^{26} mit der geviertelten Steifigkeit ausgewertet und dann jedoch mit einem Wichtungsfaktor auf die Partikel 2 und 6 zurückgespeichert. Das Partikel 2 erhält dabei einen Faktor von 4,0 um die Reduktion der Steifigkeit wieder auszugleichen. Das Partikel 6 erhält einen Faktor 1,0 und zusätzlich die Kräfte aus den gespiegelten Kontakten. Dieser Ansatz schafft zwar ein Ungleichgewicht im Kontakt C^{26} , welches extern ausgeglichen werden muss, hat aber zur Folge, dass die unerwünschten Tensoreinträge in \mathbb{C}_{DEM} ausgeglichen werden können. Das Ergebnis der Korrektur des Elastizitätstensors ist in Abbildung 3.30 dargestellt. Der Fehler unterscheidet sich für $\nu = 0,0$ nur unwesentlich zum Abschnitt 3.4.2, da sich hier auf der Nebendiagonalen der lokalen Steifigkeitsmatrix aus Gleichung (3.57) der Wert

0,0 ergibt. Für größere ν hingegen wird der Fehler deutlich reduziert.

Die Querdehnzahl kann nun bis $\nu = 0,26$ gesteigert werden. Danach treten jedoch weiterhin Instabilitäten auf. Die Modifikation des Elastizitätstensors und damit der lokalen Steifigkeitsmatrix der Randpartikel reicht nicht aus, um Stabilität für höhere Bereiche von ν zu gewährleisten, da die Determinanten der Gesamt- oder Teilsteifigkeitsmatrizen des Würfels weiterhin Nulldurchgänge bei $\nu = 0,26$ aufweisen.

3.4.4 Einfluss der Rotationsfreiheitsgrade

Rotationen am Materialpunkt sind in der klassischen Kontinuumsmechanik nicht vorhanden. Die DEM in ihrer ursprünglichen Form für granulare Medien sowie die daraus entstandenen Modelle für Festkörper beschreiben jedoch auch rotatorische Bewegungen. Die Mitnahme der zusätzlichen Freiheitsgrade in diesem DEM Modell hat Auswirkungen die Lösung sowie auf die Stabilität der Berechnung. Um den Einfluss zu untersuchen, wird erneut ein Würfel unter einachsialer Spannung berechnet. Während die Querdehnzahl konstant zu $\nu = 0,1$ gesetzt wird, wird die Anzahl der Einheitszellen variiert. Abbildung 3.31 zeigt den Unterschied durch das Berücksichtigen der Rotationsfreiheitsgrade.

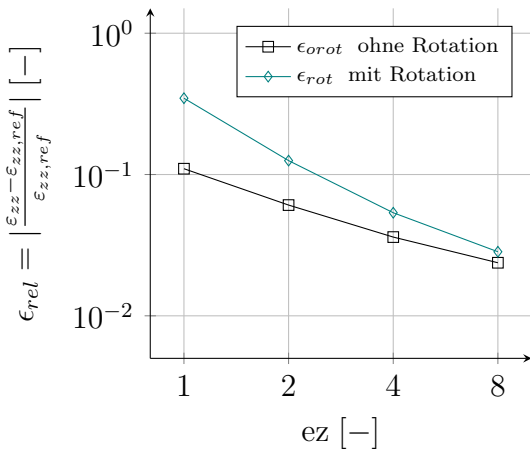


Bild 3.31: Fehler aus Rotationsfreiheitsgraden

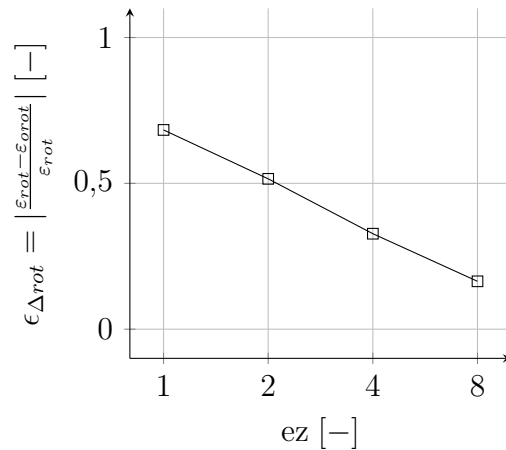


Bild 3.32: Anteil der Rotationen am Gesamtfehler

Durch das Aktivieren der Rotationsfreiheitsgrade wird der Fehler der Verzerrungen größer. Für beide Simulationen nimmt der Fehler erwartungsgemäß mit wachsender Feinheit der Würfelauflösung ab. Werden die Rotationen jedoch berücksichtigt, ist die Konvergenzordnung größer. Dieses Verhalten deutet darauf hin, dass der Fehler aus Rotationen vor allem in den Randbereichen auftritt, die bei steigender Anzahl an Einheitszellen an Bedeutung verlieren. Betrachtet man in Abbildung 3.32 den Anteil des Fehlers aus Rotationen am Gesamtfehler, $\epsilon_{\Delta rot}$, wird deutlich, dass die Rotationen mit kleiner werdenden Partikeln bzw. Randbereichen an Einfluss auf den Fehler verlieren.

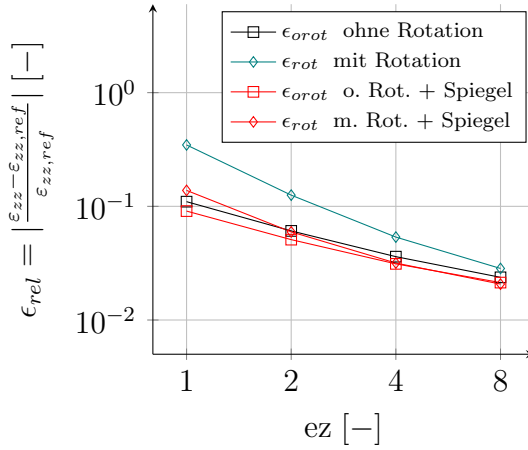


Bild 3.33: Fehler aus Rotationsfreiheitsgraden mit Spiegeln

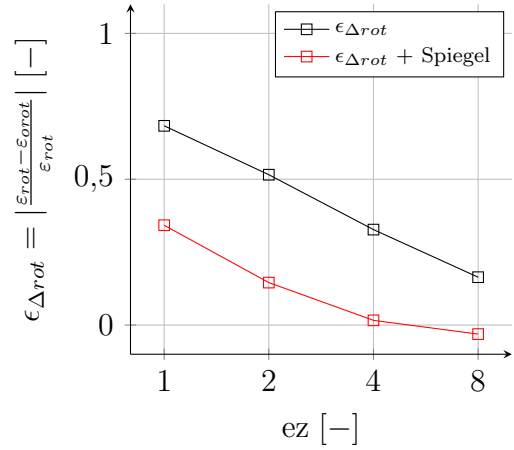


Bild 3.34: Anteil der Rotationen am Gesamtfehler mit Spiegeln

Werden zusätzlich die Spiegel aus dem vorangegangenen Abschnitt 3.4.3 aktiviert, ist in Abbildung 3.33 zu erkennen, dass der Fehler insgesamt verringert werden kann. Die Spiegel senken das Fehlerniveau erheblich und die steigende Anzahl der Einheitszellen verringern den Einfluss der Rotationen. Die Graphen für den Fehler mit aktivierten Spiegeln in Abbildung 3.33 schneiden sich etwa bei vier Einheitszellen, was bedeutet, dass hierfür die Lösung mit Rotationsfreiheitsgraden besser ist. Der Einfluss der Ränder ist durch steigende Einheitszellen und die Verbesserung durch das Spiegeln von Randkontakten so weit reduziert worden, dass die Rotationen im Inneren eine bessere Lösung ermöglichen.

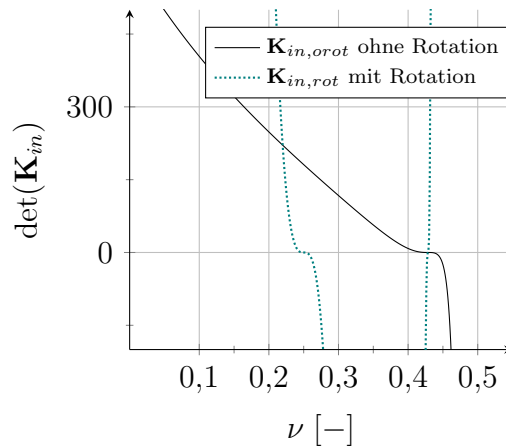


Bild 3.35: Determinanten der lokalen Steifigkeitsmatrizen im Inneren des Würfels

Neben den Fehlern, die durch die Rotationen der Partikel entstehen, haben die Freiheitsgrade Einfluss auf die Stabilität der Lösung. Zum Vergleich des Modells

mit und ohne Rotationen sind die Determinanten der lokalen Steifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{K}_{in,rot} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{in,orot} & & \\ & \hat{k}_2 & \\ & & \hat{k}_2 \\ & & & \hat{k}_2 \end{bmatrix} \quad \text{mit}$$

$$\mathbf{K}_{in,orot} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & & \\ & \hat{k}_1 & \\ & & \hat{k}_1 \end{bmatrix} ,$$

$$\hat{k}_1 = 6k_n + 8k_s + 4k_{okt} \quad \text{und} \quad \hat{k}_2 = r^2 (8k_s + 4k_{okt}) ,$$

eines innenliegenden Partikels in Abbildung 3.35 ausgewertet. Der Elastizitätsmodul sowie der Radius des Partikels sind hierbei normiert. Es wird lediglich die Abhängigkeit von ν untersucht. Die Determinante der Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}_{in,rot}$ hat, neben dem schon aus Abbildung 3.28 bekannten, einen weiteren deutlich geringeren Nulldurchgang. Diese Eigenschaft sorgt selbst für das unendliche Kontinuum ohne Randbereiche für Instabilitäten ab einer Querdehnzahl von $\nu = 0,25$. Für den Würfel und den damit verbundenen Randbereichen hat die Aktivierung der Rotationen schon bei $\nu > 0,2$, sprich sobald k_s negativ wird, ein instabiles Lösungsverfahren zur Folge.

3.4.5 Schlussfolgerung

Das DEM Modell hat mehrere Besonderheiten, die das Ergebnis beeinflussen können. Zwei der wesentlichen Modellfehler wurden in den vorangegangenen Abschnitten analysiert und können in den folgenden Kapiteln durch entsprechende Maßnahmen minimiert werden. Zum Einen erfolgt die Herleitung der Modellparameter für das Gebiet ohne Berücksichtigung der Ränder, sodass geometriebedingte und modellabhängige Fehler in diesen Bereichen entstehen. In Abschnitt 3.4.3 wird eine Methode vorgestellt, wie diese Fehler minimiert werden können. Die Randbereiche bleiben jedoch trotzdem von großer Bedeutung für das Fehlerniveau.

Weiterhin wird der Einfluss der Rotationsfreiheitsgrade untersucht. Die Rotationen sind in der klassischen Kontinuumsmechanik nicht vorhanden und wären somit auch nicht notwendig für das DEM-Modell. Betrachtet man jedoch Bruchvorgänge und damit verbundene Kollisionen von Teilen des Kontinuums untereinander, sind diese Freiheitsgrade wesentlicher Bestandteil der dort angewendeten Kontaktmodelle. Der Einfluss der Rotationen auf das Fehlerniveau ist maßgeblich von den geometrischen Rändern des Modells abhängig. Der Anteil des Fehlers aus der Mitnahme der Rotationen kann deutlich reduziert werden, wenn die Randbereiche durch eine größere Anzahl Partikel aufgelöst sind. Weiterhin können die gespiegelten Kontakte aus Abschnitt 3.4.3 die Ränder stabilisieren und deren Einfluss verringern. Ist der Einfluss der Ränder klein genug, können die Rotationen die Lösung sogar verbessern.

Eine feine Auflösung des Kontinuums in Kombination mit den gezeigten Stabilisierungen der Ränder kann den Fehler für die Simulationen in den folgenden Kapiteln verringern. Eine stabile Berechnung kann unter Berücksichtigung der Rotationsfreiheitsgrade nur bis zu einer Querdehnzahl von $\nu = 0,2$ gewährleistet werden. Für Berechnungen ohne Rotationen kann eine Obergrenze für ν nicht allgemein ermittelt werden. Die Stabilität des Verfahrens ist abhängig von der Geometrie und Lagerung der Randbereiche.

4 Simulation von Bruchvorgängen

Beton ist ein spröder Werkstoff, der unter Zugspannungen zu Rissbildung und spontanem Versagen neigt. Heterogenitäten führen zu lokalen Spannungsspitzen, die Mikrorisse initiieren können. Diese pflanzen sich fort und wachsen zusammen, bis auf der makroskopischen Skala Trennrisse entstehen, die zu schlagartigem Bauteilversagen führen können. Um das materialspezifische Phänomen abbilden zu können, wird das DEM Modell nachfolgend erweitert. Ansätze aus dem Bereich der Kontinuumsmechanik berücksichtigen diese Phänomenologie häufig über Materialmodelle mit Schädigung. Dabei werden zusätzliche Modellgleichungen für die Schädigung angesetzt, die die Schädigung quantifizieren und ihre räumliche und zeitliche Entwicklung beschreiben. Ist das Material lokal geschädigt, verringert sich die Steifigkeit. Weiterführende Ansätze aus dem Bereich der XFEM beschreiben die Rissbildung durch das Kontinuum entlang des geschädigten Bereiches. Eine vollständige Trennung ist im Rahmen der Kontinuumschädigungsmechanik nicht vorgesehen, jedoch mit einer diskreten Modellbildung des Risses möglich.

Die DEM bietet die Möglichkeit Risse diskret zu erfassen, da das Kontinuum auf diskrete Partikel verteilt wurde, die sich voneinander lösen können. Im Gegensatz zu Ansätzen aus der klassischen Kontinuumsmechanik kann hiermit eine vollständige Trennung des Berechnungsgebietes erfolgen. Bei Untersuchungen des Bruchverhaltens von Beton kommt es häufig zu Abplatzungen bzw. Trennungen des Gebietes. Der kleinste lokale Riss, der diskret abgebildet werden kann, ist die Trennung von zwei initial verbundenen Partikeln und hat damit die Größenordnung der Radii der beteiligten Partikel. Risse auf kleineren Skalen werden auf der Berechnungsebene nicht abgebildet.

In den letzten Jahren werden verschiedene Modelle entwickelt, um Bruchvorgänge mit der DEM zu beschreiben. Die Anwendungen reichen dabei von Biopolymeren, siehe HEDJAZI ET AL [32], über Glas z.B. in ANDRÉ ET AL [2], bis hin zu Zement oder Beton in BRWON ET AL [6] und RIERA ET AL [65]. Ein großes Anwendungsgebiet neben der Materialmodellierung ist die Simulation von impulsartigen Einschlägen auf eine Struktur im Bereich der Militärforschung, siehe z.B. SHIU ET AL [74] oder TAVAREZ und PLESHA [77]. Ein Überblick der bestehenden Versagensmodelle bzw. -kriterien erfolgt in Abschnitt 4.1. Das in dieser Arbeit verwendete Modell lokaler Verzerrungen wird in Abschnitt 4.2 vorgestellt.

4.1 Versagenskriterien

Das Aufbrechen eines Kontaktes kann verschiedene Ursachen haben. Häufig wird das lokale Überschreiten einer maximalen Zugspannung als Ursache für initiale Rissbildung angenommen. Da im DEM-Modell diskrete Kräfte zwischen den Partikeln aus-

gewertet werden, wird als Versagenskriterium häufig die Zugkraft in Normalenrichtung begrenzt. ZUBELEWICZ und BAŽANT [91] führen eine maximale Zugkraft ein, bei der die Federsteifigkeit in Normalrichtung zu Null gesetzt wird. Die Maximalwerte für die Zugkraft sind jedoch abhängig von der Elementgröße. Wenn ein Bereich des Kontinuums feiner aufgelöst wird, werden die Kräfte in jedem Kontakt kleiner, sodass die kritische Kontaktkraft entsprechend angepasst werden muss. SAWAMOTO ET AL [66] definieren die maximale Kontaktnormalkraft aus diesem Grund in Abhängigkeit der Radii der Partikel, der materialspezifischen Zugfestigkeit sowie der Dicke des Modells im 2D-Raum. Das Kriterium ist damit modellgrößenunabhängig, jedoch nur für regelmäßig hexagonal angeordnete Partikel.

Neben Zugspannungen oder -kräften kann das lokale Versagen des Materials auch aufgrund von Schubkräften initiiert werden. Neben Modellen, bei denen separate Bruchbedingungen für die Schub- und Zugkräfte definiert werden, siehe z.B. MAGNIER und DONZÉ [52], werden auch kombinierte Bedingungen formuliert. Andere Modelle verwenden Bruchbedingungen, die die Partikel mit diskreten Balkenelementen verbinden. Der Kontakt wird durch einen Balken zwischen den Mittelpunkten der beiden Partikel repräsentiert. Am Balken werden verschiedene Versagensmoden definiert, die allein oder kombiniert zum Versagen des Kontaktes führen können. Für zweidimensionale diskrete Elemente wird diese Idee unter Anderem von SCHLANGEN und VAN MIER in [67] vorgeschlagen, die ein kombiniertes Spanningskriterium

$$\sigma_{krit} = \frac{f_n}{A_{ij}} + \alpha_m \frac{\max(|m_i|, |m_j|)}{W_{ij}} \quad (4.1)$$

definieren. Die Formulierung setzt voraus, dass die Balkenelemente eine räumliche Ausdehnung haben und die Schnittgrößen entsprechend ausgewertet werden.

Das in dieser Arbeit verwendete diskrete Elemente Modell setzt hingegen Punktkontakte voraus, die die beiden angrenzenden Partikel verbindet. Ebenfalls auf der anschaulichen Basis eines Balkenelementes haben KUN und HERRMANN [43] das Kriterium

$$\left(\frac{\varepsilon_n}{\varepsilon_u} \right)^2 + \frac{\max(|\theta_i|, |\theta_j|)}{\theta_u} \leq 1 \quad , \quad \text{mit } \varepsilon_n \geq 0 \quad , \quad (4.2)$$

entwickelt. Der erste Teil der Gleichung (4.2) berücksichtigt das Versagen aufgrund von Längsverzerrungen zwischen den Partikeln, der zweite Teil berücksichtigt das Biegeversagen der Balken aufgrund von Verdrehungen an den Enden. ε_u sowie θ_u sind Modellparameter die an Experimente oder das gewünschte Materialverhalten angepasst werden müssen. Das ursprünglich für ebene Gebiete entwickelte Kriterium wird vielfach weiterentwickelt und unter anderen von CARMONA ET AL oder [7] KUN ET AL [44] in dreidimensionalen Anwendungen oder für polygonale diskrete Elemente verwendet, siehe z.B. D’ADDETTA ET AL [17, 18].

4.2 Kriterium lokaler Verzerrungen

Das Kriterium für das Versagen eines Kontaktes muss mehrere Bedingungen erfüllen. Zum Einen müssen die physikalischen Phänomene, die zum Bruch führen können, berücksichtigt werden. Weiterhin sollte das Kriterium modell- bzw. modellgrößenunabhängig sein, damit eine Reproduzierbarkeit und Konvergenz für Bruchsimulationen erreicht werden kann. Unter diesen Aspekten wird im Folgenden ein Kriterium für lokale Verzerrungen entwickelt. Angelehnt an das Modell von KUN und HERRMANN [43] werden die lokalen Verzerrungen begrenzt und dabei der Einfluss von Längs- sowie Schubverzerrungen kombiniert berücksichtigt. Während das Schubversagen in [43] über eine Begrenzung der Winkel des Balkenelements berücksichtigt wird, wird hier auch in der Schubfläche eine Begrenzung der Verzerrungen angesetzt. Ein Kontakt versagt, sobald das Kriterium

$$1 \geq \begin{cases} \left(\frac{\alpha_{\varepsilon n} \varepsilon_{nn}^{ij}}{\varepsilon_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{ns}^{ij}}{\varepsilon_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{nt}^{ij}}{\varepsilon_{max}} \right)^2 & , \text{ wenn } \varepsilon_{nn}^{ij} > 0 \\ \left(\frac{\varepsilon_{ns}^{ij}}{\varepsilon_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\varepsilon_{nt}^{ij}}{\varepsilon_{max}} \right)^2 & , \text{ wenn } \varepsilon_{nn}^{ij} < 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

nicht mehr eingehalten ist. Während in anderen Modellen häufig ein Versagen des Kontaktes nur unter Zugspannungen oder -verzerrungen möglich ist, ist das Kriterium (4.3) in einen Zug- und einen Druckbereich aufgeteilt. In einem Zustand positiver Längsverzerrungen wird eine kombinierte Bedingung aus Schub- und Längsverzerrungen überprüft, im negativen Bereich von ε_{nn}^{ij} führen ausschließlich die Schubverzerrungen zu einem Versagen des Kontaktes. Die Versagensfläche der lokalen Verzerrungen ε_{lo} in Abhängigkeit der Parameter ist in Abbildung 4.1 dargestellt.

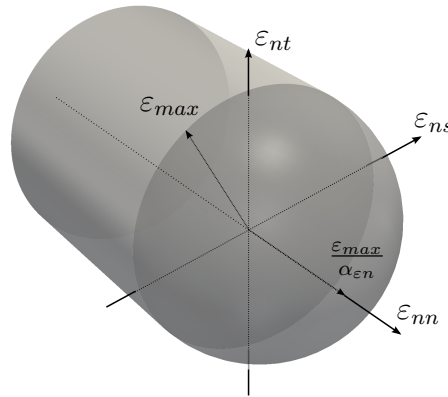


Bild 4.1: Versagensfläche der lokalen Verzerrungen

Das Kriterium aus Gleichung (4.3) hat zwei Modellparameter ε_{max} und $\alpha_{\varepsilon n}$. Die maximale lokale Verzerrung ε_{max} kann als Begrenzung der Entfernung zweier Partikel interpretiert werden. Entfernen sich zwei Punkte im Gebiet, entsteht anschaulich ein Riss. $\alpha_{\varepsilon n}$ ist ein Wichtungsfaktor für die Unterscheidung in Zug- und Druckbereich. Wird der Parameter $\alpha_{\varepsilon n}$ erhöht, verkleinert sich die Versagensfläche im Zugbereich. Die Unterscheidung in Druck- und Zugversagen wird in ähnlicher Form

auch in der Kontinuumsmechanik wie z.B. der DRUCKER-PRAGER-Hypothese [24] oder dem MOHR-COULOMB-Kriterium gewählt. Hierbei werden die einachsialen Druck- und Zugfestigkeiten ins Verhältnis gesetzt und als Parameter im Bruchkriterium verwendet.

Bei der Wahl der Parameter handelt es sich um ein inverses Problem, da die benötigten Informationen nicht im Vorfeld bekannt sind, siehe. z.B. auch ZHAO ET AL [89]. Die Bestimmung der Parameter muss in mehreren Schritten erfolgen. Es werden Simulationen durchgeführt, für die eine Referenzlösung vorhanden ist, und die Parameter nach einem Vergleich mit der Referenzlösung angepasst. Da die Parameter modell- und modellgrößenunabhängig sind, müssen diese nur einmal an das Materialverhalten angepasst werden.

Versagt ein Kontakt zwischen initial verbundenen Partikeln unter Zugspannungen bzw. -verzerrungen werden keine Kräfte mehr übertragen, sodass sich die Partikel im Laufe der Simulation voneinander entfernen können. Treffen die Partikel im weiteren Verlauf der Berechnung aufeinander, wird die Kollision nach Kapitel 2 ausgewertet. Wird die Bedingung aus Gleichung (4.3) unter negativen Verzerrungen in Normalenrichtung aufgrund der Schubverzerrungen überschritten, wird der Kontakt ebenfalls gelöst und aufgrund der weiterhin wirkenden Normaldruckkraft als Kollision interpretiert. Der jetzt wirkende Kontakt hat keine Steifigkeit in den Scherrichtungen, sondern kann lediglich die Normalkräfte übertragen.

4.3 Simulation von einachsialen Beton-Druckversuchen

Die Ermittlung der Druckfestigkeit von Beton oder Überprüfung der Eigenschaften einer Betonrezeptur zu überprüfen, erfolgt in der Regel mit einachsialen Druckversuchen an Betonkörpern. Die gängigsten Prüfkörper stellen Würfel und Zylinder dar. Die Ergebnisse von Würfeldruckprüfungen streuen stärker als bei zylindrischen Prüfkörpern. Ursachen sind die geometrischen Kerben der Kantenbereiche, die bei rotationssymmetrischen Zylindern nicht auftreten, siehe z.B. VAN MIER [81]. Die Modellierung runder Geometrien ist mit dem verwendeten DEM Modell möglich, es entstehen allerdings modellbedingte Kerben an den Rändern, die das Ergebnis beeinflussen können, siehe Abschnitt 3.4. Die vorgegebene gitterartige Anordnung der Partikel in der kubisch dichtesten Packungslage kann Prismen mit runden Rändern nur näherungsweise abbilden. Die Ränder können mit feinerer Elementierung besser abgebildet werden, was jedoch den Berechnungsaufwand deutlich erhöhen würde. Aus diesem Grund werden in diesem Abschnitt zunächst ausschließlich Würfel untersucht.

Experimentelle Druckversuche werden in der Regel mit hydraulischen Pressen durchgeführt. Die Randbedingungen, die daraus für eine numerische Simulation resultieren, können im DEM Modell über starre Wände abgebildet werden. Die Auflagerplatten werden als glatte Wände simuliert und können entsprechend des Pressenweges als Starrkörper bewegt werden. Dieser Versuchsaufbau beinhaltet Störfaktoren bei der Lasteinleitung. Durch die Reibung an den Platten entsteht ein Einschnü-

rungsdruck für den Prüfkörper, der die Druckfestigkeit erhöht. Ein bereits im Jahre 1900 von FÖPPL [26] vorgeschlagenes schmieren der Lasteinleitungsplatten führt zwar zu einer Verringerung der Einschnürung, aber gleichzeitig auch zu einer ungleichmäßigeren Lasteinleitung und damit nicht zum gewünschten Ziel. KUPFER und ZELGER [45] stellten ein Programm von biachsialen Spannungsversuchen vor, in dem die Lasteinleitung über Stahlbürsten erfolgt, um eine möglichst zwängungsfreie Lagerung zu erhalten. Dieser Versuchsaufbau wurde in [45] sowohl für Druck- als auch durch ein Verkleben der Bürsten für Zugversuche verwendet. Diese Art der Lagerung um eine möglichst reine Druck- oder Zugbelastung zu erhalten, wird in den Abschnitten 4.4 und 4.5 näher untersucht. Für die numerische Simulation des Bruchverhaltens von Betonwürfeln wird im Folgenden der Versuchsaufbau mit Lasteinleitungsplatten modelliert.

4.3.1 Modellierung

Zunächst werden Würfel mit einer Kantenlänge von 20 [cm] untersucht. Die Würfel sind zwischen zwei beweglichen Wänden platziert und weggesteuert bis zum Druckversagen belastet. Die Wände sind starre Randbedingungen nach Abschnitt 2.5, die mit den Partikeln kollidieren können. Die Bewegung der Wand und damit die Belastung für den Würfel wird in der Relativgeschwindigkeit zwischen Partikel und Wand berücksichtigt. Die Laststeigerung erfolgt schneller als bei herkömmlichen experimentellen Versuchsabläufen. In der Praxis werden häufig Belastungsgeschwindigkeiten von $v = 0,6 \pm 0,2$ [N/mm²s] ausgewählt, siehe z.B. LOCH [50], sodass ein Experiment je nach Betonfestigkeit mehrere Minuten dauern kann. In der Simulation wird der Bruch innerhalb eines Zeitraumes von $t = 5$ [s] erreicht. Aufgrund der hohen Steifigkeit und den daraus resultierenden hohen Eigenfrequenzen von Beton ist eine Verkürzung der Simulationszeit erforderlich, um den Berechnungsaufwand zu reduzieren. Der Einfluss einer schnelleren Belastung wird in Abschnitt 4.3.3 untersucht. Ebenso wie bei experimentellen Versuchen soll die Last in der Simulation nicht kontinuierlich sondern in Inkrementen aufgebracht werden. Die Wandbewegung wird deshalb mit einer sich mit 50 [Hz] wiederholenden HERMITE-Funktion beschrieben, und der Würfel auf diese Weise in vielen kleinen Schritten belastet.

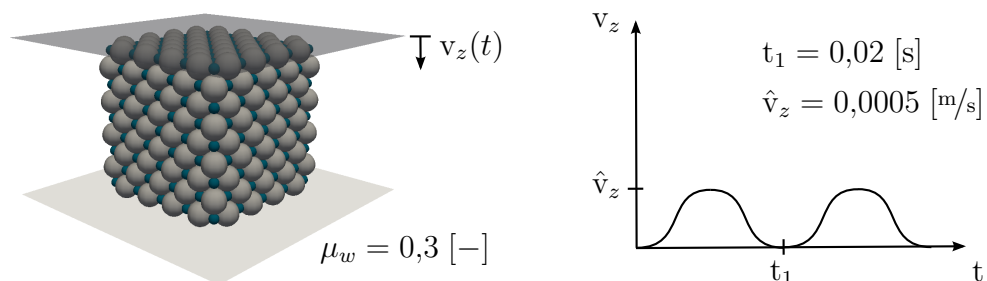


Bild 4.2: Modellaufbau für Betonwürfel-Druckversuche

Sowohl der Würfel als auch die Wände besitzen keine Heterogenitäten bzw. Imperfektionen. Der Würfel wird ohne Ausmitte belastet, sodass ein lineares Last-Verformungsverhalten bis zum schlagartigen Bruch erwartet wird. Der Simulationsaufbau ist am Beispiel eines Würfels mit vier Einheitszellen in Abbildung 4.2 dargestellt. Die Materialeigenschaften des Würfels sind mit den Parametern $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$ und $\nu = 0,18 \text{ [-]}$ sowie dem Dämpfungsmaß $\alpha_d = 0,03 \text{ [-]}$ festgelegt. Im Falle einer Kollision nach dem Bruchversagen wird ein Kontakt nach HERTZ und MINDLIN ausgewertet, siehe Abschnitt 2.1.3, wobei der Reibbeiwert $\mu = 0,6 \text{ [-]}$ und das Dämpfungsmaß zu $\alpha_h = 0,05 \text{ [-]}$ gesetzt sind. Die Wände haben ebenfalls einen Reibbeiwert $\mu_w = 0,3 \text{ [-]}$. Zunächst wird die Unabhängigkeit des Versagenskriteriums von der Modellgröße untersucht, indem der Würfel für verschiedene Anzahlen an Partikeln zerdrückt wird. In dem darauffolgenden Abschnitt 4.3.3 wird der Einfluss des Lösungsverfahrens sowie der Belastungsgeschwindigkeit analysiert.

4.3.2 Einfluss der Modellgröße

Das Bruchmodell soll modellgrößenunabhängig sein, damit die Elementierung keinen Einfluss auf den initialen Versagenspunkt einer Struktur hat. Abbildung 4.3 zeigt das Spannungs-Dehnungs-Diagramm des Würfels für verschiedene Anzahlen von Einheitszellen. Das Versagenskriterium wurde mit den Parametern $\varepsilon_{max} = 0,0025$ und $\alpha_{\varepsilon n} = 10$ für alle Elementierungen identisch gewählt.

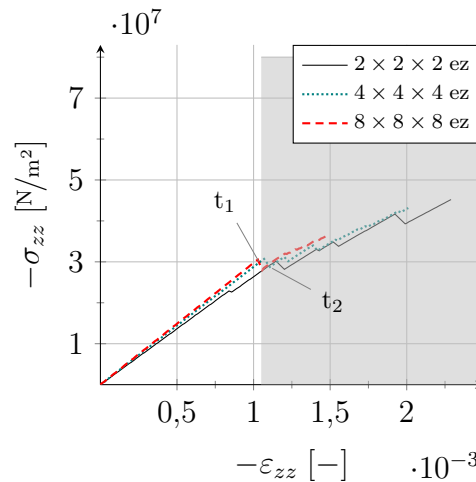


Bild 4.3: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für verschiedene Elementierungen

Die Last-Verformungskurve des Würfels ist für alle Feinheiten zu Beginn der Belastung linear. Je feiner die Elementierung, desto genauer wird das linear elastische Materialverhalten beschrieben, wobei die angesetzte Steifigkeit von $E = 3 \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$ bereits für wenige Einheitszellen gut abgebildet wird. Ab einer Elementierung von vier Einheitszellen je Richtung ändert sich die Steigung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufes nur noch geringfügig. Bei einer Spannung von etwa $\sigma = 3 \cdot 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$ tritt

für alle Einheitszellen die erste signifikante Strukturänderung mit sichtbarem Steifigkeitsverlust auf. Bei zwei Einheitszellen gibt es zusätzlich bei $\sigma = 2,5 \cdot 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$ einen geringen Einschnitt in das lineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten, der jedoch kaum Einfluss auf die Steifigkeit des Würfels hat. Folgende Abbildung 4.4 zeigt die Kontakte im Würfel vor und nach dem ersten Versagenspunkt bei $\sigma = 3 \cdot 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$ für vier bzw. acht Einheitszellen je Raumrichtung. Abbildung 4.5 zeigt zugehörig die zum Versagenszeitpunkt reißenden Kontakte.

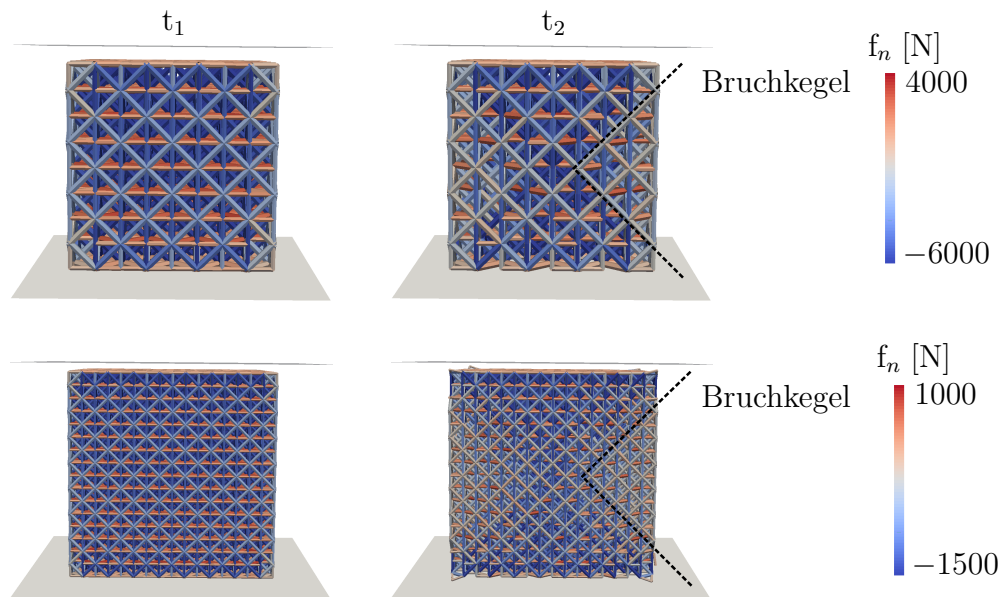


Bild 4.4: Würfel zur Zeit $t_1 = 1,50 \text{ [s]}$ und $t_2 = 1,51 \text{ [s]}$ für vier (oben) und acht (unten) Einheitszellen je Richtung

Das Versagensbild ist für beide Elementierungen sehr ähnlich. Die Kontakte in Quer- richtung der Belastung reißen aufgrund des Querkuges auf. Aufgrund der Einschnü- rungswirkung an der Lasteinleitung reißen die Kontakte vermehrt in der Mitte des Würfels. Die Kerbwirkung der vertikalen Kanten, siehe z.B. VAN MIER [81], sorgt dafür, dass hier die meisten Kontakte versagen. Die Resttragstruktur entspricht der typischen Versagensform eines Bruchkegels, siehe z.B. DEL VISO ET AL[20] oder VONK [82].

Der Versagenszeitpunkt sowie die Versagensform sind für vier und acht Einheits- zellen identisch. Daraus kann geschlossen werden, dass das Bruchkriterium für das initiale Reißen sowie die Versagensform des Betons undabhängig von der Modellfein- heit ist. Der grau hinterlegte Bereich in Diagramm 4.3 unterscheidet sich für die ver- schiedenen Elementierungen. Dieser Bereich ist der imperfektionslosen Modellierung geschuldet. Nach dem spontanen Versagen der Struktur entsprechend der Abbildun- gen 4.4 und 4.5 trägt der Würfel auch in den äußeren Bereichen über die vertikalen

Kontakte Druckkräfte ab, bis ein Stabilitätsversagen aller Kontakte auftritt. Dieser Versagenszeitpunkt ist abhängig von der Elementierung und wird geringer, je feiner der Würfel aufgelöst wird. Die Bruchlast liegt jedoch bei $\sigma = 3 \cdot 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$ und ist modellgrößenunabhängig.

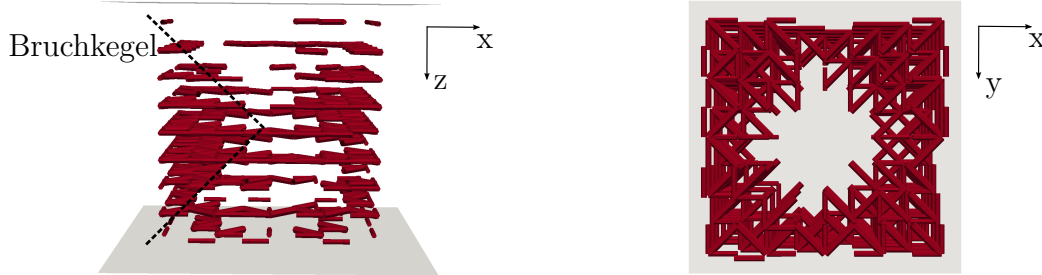


Bild 4.5: Gerissene Kontakte zum Zeitpunkt $t_2 = 1,51 \text{ [s]}$ (hier: 4 Einheitszellen)

Die Vorgabe von Imperfektionen bzw. die Streuung der Parameter, um den eigenwertgesteuerten Nachbruchbereich zu verhindern, wird in Abschnitt 4.3.4 untersucht. Werden die Materialparameter gestreut, nähert sich die maximale Last dem Wert von $\sigma = 3 \cdot 10^7 \text{ [N/m}^2\text{]}$ an. Dies zeigt, dass der grau hinterlegte Bereich aus Diagramm 4.3 numerischen Ursprungs ist. Da sich bei vier Einheitszellen bis zur Bruchlast nur noch vernachlässigbare Unterschiede zur feineren Elementierung zeigen, werden die folgenden Untersuchungen am Modell mit vier Einheitszellen in jeder Richtung durchgeführt.

4.3.3 Einfluss des Zeitintegrationsverfahrens

Die Ergebnisse der Simulationen werden von vielen Materialparametern beeinflusst. Zunächst ist sicherzustellen, dass das Ergebnis unabhängig vom Zeitintegrationsverfahren ist. Die Bruchsimulationen aus dem vorangegangenen Abschnitt enthalten schlagartige Zustandsänderungen, und die Partikel erfahren sehr große Geschwindigkeiten. Zusätzlich werden sehr viele Zeitschritte hintereinander berechnet. Diese Gegebenheiten stellen hohe Ansprüche an das Zentrale-Differenzen-Verfahren aus Abschnitt 2.4. Aus diesem Grund wird hier der Einfluss der Zeitschrittweite untersucht. Weiterhin wird die Auswirkung der zuvor erwähnten schnelleren Belastungsgeschwindigkeit betrachtet.

Die für die Stabilität der Berechnung notwendige Zeitschrittweite richtet sich nach den höchsten Frequenzen des Systems. In Abschnitt 2.4.4 wurde ein kritischer Zeitschritt Δt_{kr} definiert, unterhalb dem die Berechnung stabil ist. Für den Würfel aus Abbildung 4.2 ergibt sich die Zeitschrittweite

$$\Delta t_{kr} \approx \frac{1,62 \cdot 10^{-6}}{ez} \text{ [s]} \quad (4.4)$$

in Abhängigkeit von der Anzahl der Einheitszellen. Um neben der Stabilität zusätzlich zu gewährleisten, dass das Zeitintegrationsverfahren das Ergebnis nicht beeinflusst, wird ein Würfel mit vier Einheitszellen für variierende Zeitschrittweiten untersucht. Die Ergebnisse sind im folgenden Diagramm 4.6 dargestellt.

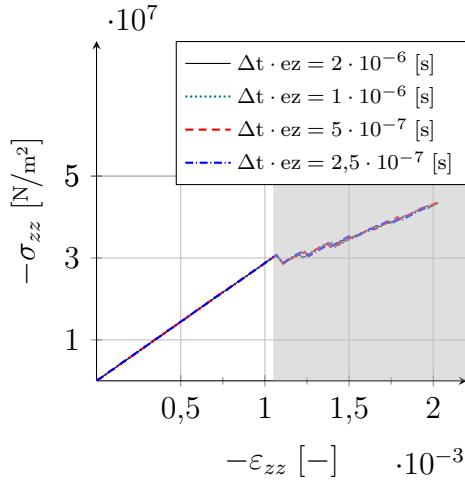


Bild 4.6: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für verschiedene Δt

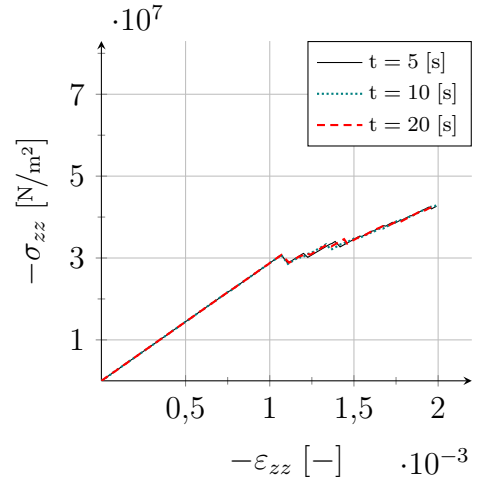


Bild 4.7: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für verschiedene Simulationszeiten

Die Simulation ist für die kritische Zeitschrittweite Δt_{kr} sowie kleinere Zeitschritte stabil. Der erste Versagenspunkt ist vollständig unabhängig von der gewählten Zeitschrittweite, lediglich das Verhalten nach dem Erreichen der Bruchlast unterscheidet sich minimal. Der Grund darin liegt erneut in der imperfektionslosen Modellierung des Würfels. Der Nachbruchbereich wird wie im Kapitel 4.3.2 durch numerische Fehler sowie Rechnerungenauigkeiten bestimmt. Geringe Fehler aus dem Zeitintegrationsverfahren haben in Kombination mit numerischen Ungenauigkeiten minimalen Einfluss auf den grau hinterlegten Bereich. Das Zeitintegrationsverfahren hat nach Diagramm 4.6 jedoch einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf das Ergebnis.

Die gesamte Belastung des Würfels bis zum Bruchversagen erfolgt in weniger als 5 [s]. Die schnelle Lastaufbringung ist der Minimierung des Berechnungsaufwandes geschuldet und entspricht im Allgemeinen nicht dem Vorgehen bei experimentellen Versuchen. Bei Würfelldruckprüfungen handelt es sich um quasistatische Prüfungen in denen Effekte aus dynamischer Anregung vermieden werden sollten. Wird eine Last sehr schnell im Sinne eines Impulses aufgebracht, kann diese die Struktur anregen und eine stärkere Belastung als die eigentliche quasistatische Last bedeuten. Weiterhin ist es möglich, dass eine kurzzeitig aufgebrachte Last zwar vom Material aufgenommen werden kann, diese jedoch über längere Zeiträume nicht ertragbar wäre. Dies hätte eine Überschätzung des Materials zur Folge. Um sicherzustellen, dass die Maßnahme keine Auswirkungen auf das Ergebnis hat, werden einmalig längere Simulationen mit geringeren Belastungsgeschwindigkeiten durchgeführt und die Ergebnisse verglichen.

Die Abbildung 4.7 zeigt den geringen Einfluss der Belastungsgeschwindigkeit. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten des Würfels ändert sich durch die schnellere Lastaufbringung nicht. Die Verkürzung der Belastungszeit hat insgesamt einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf die Ergebnisse. Effekte aus einer dynamischen Anregung durch die erhöhte Geschwindigkeit der Wände treten nicht auf.

4.3.4 Streuung der Materialparameter

Die Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Würfel aus den vorangegangenen Abschnitten sind zunächst linear elastisch, bis es zu den ersten Abplatzungen kommt. Ab diesem Zeitpunkt ist der Würfel nahezu vollständig geschädigt und versagt anschließend schlagartig. Beton ist in der Regel sehr heterogen und weist ein nichtlineares Verhalten bis zum Bruch auf, da sich durch Spannungsspitzen in der Struktur zunächst Mikrorisse bilden, die zusammenwachsen und dann zu Makrorissen führen. Durch die wachsenden Mikrorisse sinkt die Steifigkeit stetig, sodass das charakteristische nichtlineare Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Würfeldruckprüfungen entsteht. Um Heterogenitäten in der gleichmäßigen Gitterstruktur zu erzeugen, können die Materialparameter mit einer stochastischen Verteilung belegt werden. Ein solcher Ansatz wird in ähnlichen Anwendungen zum Beispiel von SCHLANGEN [68] verfolgt.

Um die heterogene Struktur abzubilden, könnten beispielsweise die lokalen Steifigkeiten oder maximal ertragbaren lokalen Verzerrungen in jedem Kontakt variiert werden. Da das Versagenskriterium und die zugehörigen Parameter in dieser Arbeit wie globale Materialkonstanten behandelt werden, wird im Folgenden ein Faktor für die Steifigkeiten in jedem Kontakt hinzugefügt. Der Faktor ζ_k unterliegt einer Verteilung f mit dem Mittelwert $\mu_s = 1$ und einer Standardabweichung σ_s , siehe Abbildung 4.9. Das Ergebnis der Spannungs-Dehnungs-Verläufe ist für verschiedene Verteilungen von $\zeta_k(f(\mu_s, \sigma_s))$ in folgendem Diagramm 4.8 dargestellt.

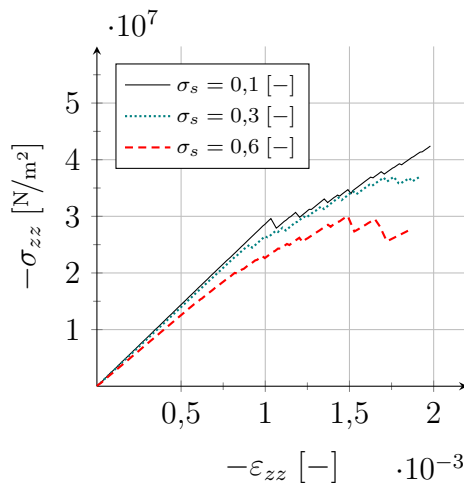


Bild 4.8: Spannungs-Dehnungs-Verläufe bei Streuung der Materialparameter

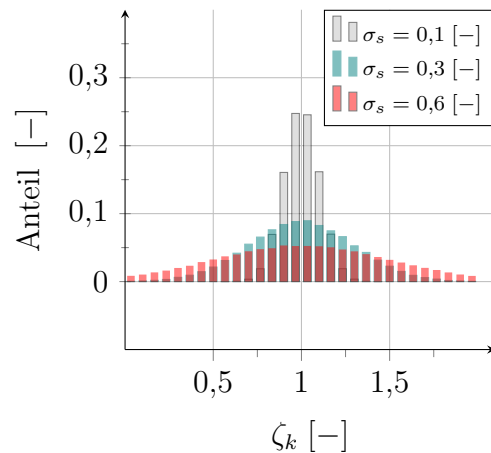


Bild 4.9: Verteilung eines Faktors ζ_k für die lokalen Steifigkeiten

Abbildung 4.8 zeigt, dass eine Streuung der Steifigkeiten mehrere Auswirkungen auf die Spannungs-Dehnungs-Verläufe hat. Zum Einen sinkt der Punkt der erstmaligen Rissbildung bzw. Kontaktauflösung mit einer Erhöhung der Streuung. Das Bruchkriterium wird lokal früher erreicht, da es aufgrund von geringeren Steifigkeiten zu lokalen Verzerrungsspitzen kommt. Weiterhin ist erkennbar, dass sich für eine breitere Streuung das charakteristische nichtlineare Verhalten von Normalbeton einstellt. Für die Standardabweichung $\sigma_s = 0,6$ beginnt das Risswachstum deutlich früher, sodass die Spannungs-Dehnungs-Linie sich nichtlinear der Bruchlast nähert. Das Abbilden der Heterogenität über eine Streuung der lokalen Steifigkeiten ist somit möglich. Die Steifigkeit des Würfels wird im ungerissenen Zustand durch die Streuung kaum beeinflusst, da der Mittelwert der Steifigkeiten weiterhin dem E-Modul entspricht. Die Steifigkeit nimmt bereits für geringe Belastungen ab, da für eine breite Streuung schon zu Beginn der Belastung die ersten Kontakte reißen,

Ermittelt man den Faktor für die lokalen Steifigkeiten aus einer Verteilungsfunktion $f(\mu_s, \sigma_s)$ besitzt jeder Würfel unterschiedliche Eigenschaften. In jedem Modell entsteht eine neue heterogene Struktur, die sich in ihrer Versagensform unterscheiden kann. In folgendem Diagramm 4.10 sind die Spannungs-Dehnungs-Verläufe von vier Würfeln dargestellt, deren Steifigkeiten alle aus derselben Verteilungsfunktion ermittelt werden.

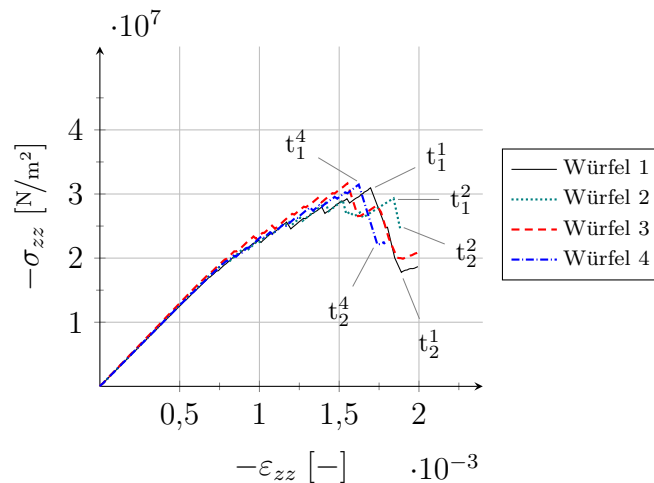


Bild 4.10: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für eine konstante Verteilungsfunktion $f(1, 0,6)$

Alle Würfel weisen qualitativ dasselbe Spannungs-Dehnungs-Verhalten auf. Die Streuung ist also im Verhältnis zur Anzahl der Kontakte im Modell so gering, dass die Ergebnisse reproduzierbar bleiben. Nach einem nahezu linearen Bereich reißen die ersten Kontakte. In der Folge stellt sich bis zum Erreichen der Maximallast das erwartete nichtlineare Verhalten ein. Danach folgt ein Steifigkeitsabfall bis zum Bruch. Im Bereich der Maximallast unterscheiden sich die Ergebnisse geringfügig voneinander, da bei den Würfeln unterschiedliche Versagensformen auftreten. Ausgewählte

Bruchformen, die zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 der jeweiligen Simulation auftreten, sind in Abbildung 4.11 dargestellt. Die Abbildung zeigt jeweils alle ungerissenen Kontakte und die lokalen Verzerrungen.

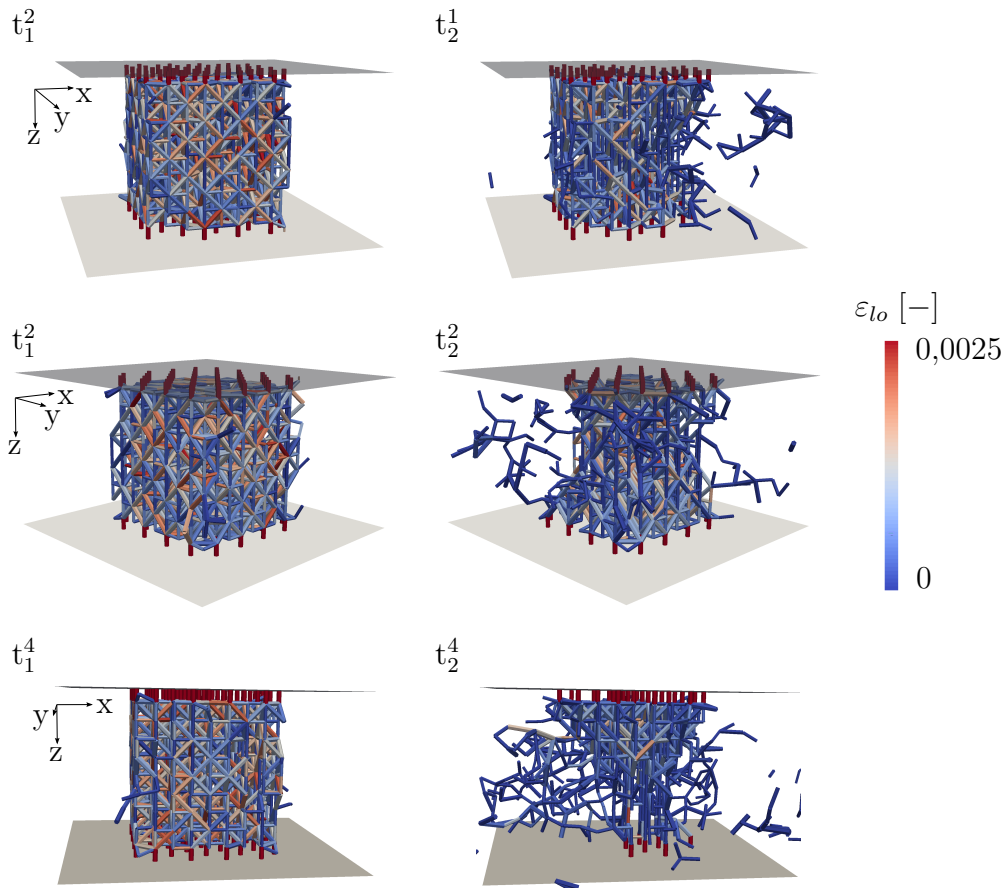


Bild 4.11: Verschiedene Versagensbilder bei konstanter Verteilungsfunktion

Es treten die typischen Versagensformen für Beton-Druckversuche auf. Das Abplatzen von ein oder mehreren Kanten (Würfel 1 und 2) tritt bei mehreren Simulationen auf. Das vollständige Abplatzen um einen Bruchkegel herum ist beispielsweise bei Würfel 4 erkennbar. Die Streuung der Steifigkeitsfaktoren hat keinen Einfluss auf den qualitativen Spannungs-Dehnungs-Verlauf, bestimmt jedoch die Versagensform. Die angestrebte Abbildung der Heterogenität von Beton kann somit erreicht werden.

4.4 Simulation von Zugversuchen an Betonprobekörpern

Während Druckversuche trotz der Einschnürungswirkung in der Regel durch Einspannen der Prüfkörper in hydraulischen Pressen erfolgen, sind Zugversuche für Beton deutlich aufwändiger. Der Einschnürungseffekt bei Druckversuchen kann je nach Prüfkörperform über Beiwerte berücksichtigt und damit gut erfasst werden. Zugversuche hingegen sind sehr anfällig gegenüber Kerben aus der Lasteinleitung und dem Prüfungsaufbau, da der Beton nach der initialen Rissbildung spröde versagt. In der Regel kommt es nicht zu Teilabplatzungen, sondern zu einer sofortigen, vollständigen Trennung des Materials. Eine Umlagerung in Bereiche mit Resttragfähigkeit erfolgt nicht. Eine durch den Versuchsaufbau bedingte Kerbe legt sowohl den Ort des Versagens als auch den Zeitpunkt fest und muss somit unbedingt vermieden werden. KUPFER und ZELGER [45] bzw. KUPFER und GERSTLE [46] haben deshalb einen Versuchsaufbau mit Stahlbürsten zur Lasteinleitung gewählt, der eine möglichst zwängungsfreie Querverformung an den Enden erlaubt und Kerbwirkung vermeidet.

4.4.1 Modellierung

Die Probekörper nach KUPFER und ZELGER [45] sind Betonscheiben mit den Abmessungen $20 \times 20 \times 5$ [cm]. Sie werden im Folgenden mit $8 \times 8 \times 2$ und $16 \times 16 \times 4$ Einheitszellen aufgelöst. Damit ergibt sich eine Auflösung mit 1445 bzw. 9803 Partikeln und 7332 bzw. 53832 initial verbundenen Kontakten. Die Prüfkörper werden zunächst an den Seiten in z-Richtung zwängungsfrei gelagert und sind in den Querrichtungen x und y frei verformbar, siehe Abbildung 4.12. Auf diese Weise wird die nahezu zwängungsfreie Lagerung mit Bürsten abgebildet. Die Belastung erfolgt über eine geschwindigkeitsgesteuerte Bewegung der gelagerten Ränder. In diesem Modell werden die Randpartikel des Modellkörpers geschwindigkeitsgesteuert bewegt.

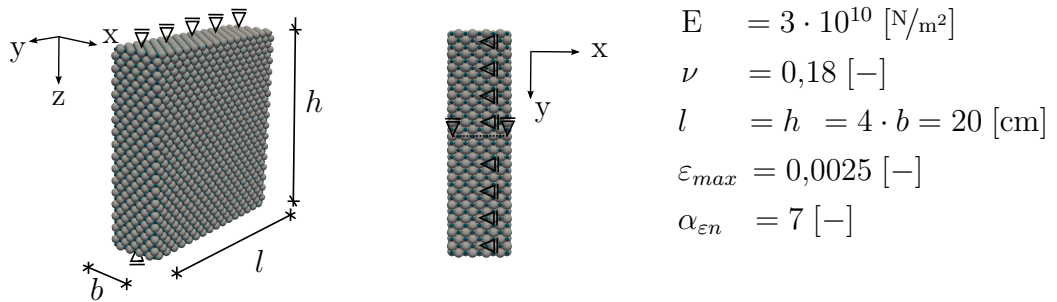


Bild 4.12: Modell für Betonscheiben nach KUPFER [45]

Die Steifigkeiten in den Kontakten werden erneut mit einer Verteilung $f(\mu_s = 1, \sigma_s = 0,6)$ belegt, um eine heterogene Struktur zu simulieren. Der Zeitverlauf der Bewegung der Randpartikel erfolgt mit kubischen HERMITE- Polynomen, die sich mit 50 [Hz] wiederholen.

4.4.2 Numerische Simulation

Die Ergebnisse für je drei einachsiale Zugbeanspruchungen von Scheiben unterschiedlicher Auflösung nach Abschnitt 4.4.1 sind im Diagramm 4.13 dargestellt. In allen sechs Simulationen zeigen die Probekörper qualitativ dasselbe Verhalten unter Zugspannungen. Der Spannungs-Dehnungs-Verlauf ist zunächst linear und fällt, nach einem kurzen Bereich der nichtlinearen Annäherung an eine kritische Zugspannung, auf einen Spannungswert von 0 ab. An dieser Stelle erfolgt eine horizontale Trennung des Kontinuums, wie in Abbildung 4.13 dargestellt, sodass keine Kraft mehr in der Belastungsrichtung übertragen werden kann. Die Spannungs-Dehnungs-Verläufe decken sich sehr gut mit denen von KUPFER und ZELGER [45]. Auch das Bruchbild in Abbildung 4.13 zum Zeitpunkt des Zugversagens kann mit dem DEM Modell gut nachgebildet werden, siehe Abbildung 4.14.

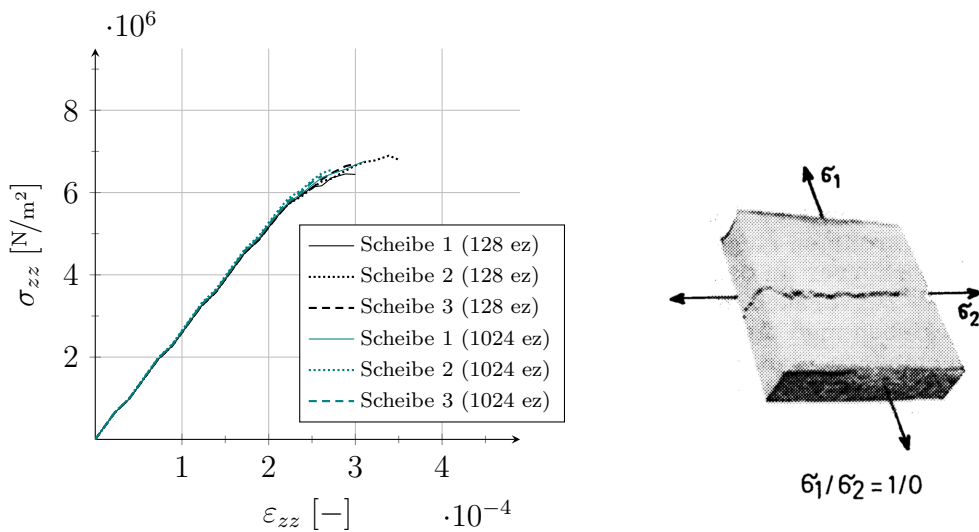


Bild 4.13: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für einachsiale Zugversuche und experimentelle Ergebnisse aus KUPFER und ZELGER [45]

In der oberen Zeile von Abbildung 4.14 ist das Versagensbild der Diskretisierung mit 128 Einheitszellen dargestellt, in der Unteren das der Diskretisierung mit 1024 Einheitszellen. Die linke Spalte zeigt den Zustand der lokalen Verzerrungen zum Zeitpunkt der maximalen Spannung. Daraufhin kommt es in der mittleren Spalte zu einem Trennriss, der sich schlagartig einstellt. Die Betonscheibe wird entlastet und die lokalen Verzerrungen der ungerissenen Kontakte gehen auf null zurück. Die rechte Spalte zeigt zur Veranschaulichung alle nach dem Spannungsabfall noch intakten (oben) bzw. gerissenen (unten) Kontakte. Der Riss trennt das Kontinuum vollständig. Die Form und der Ort der Risse variieren je nach den streuungsbedingten lokalen Schwachstellen des Materials. Die vollständige Trennung mit einem horizontalen Makroriss ist jedoch in allen sechs Simulationen identisch und entspricht den experimentellen Ergebnissen aus Abbildung 4.13.

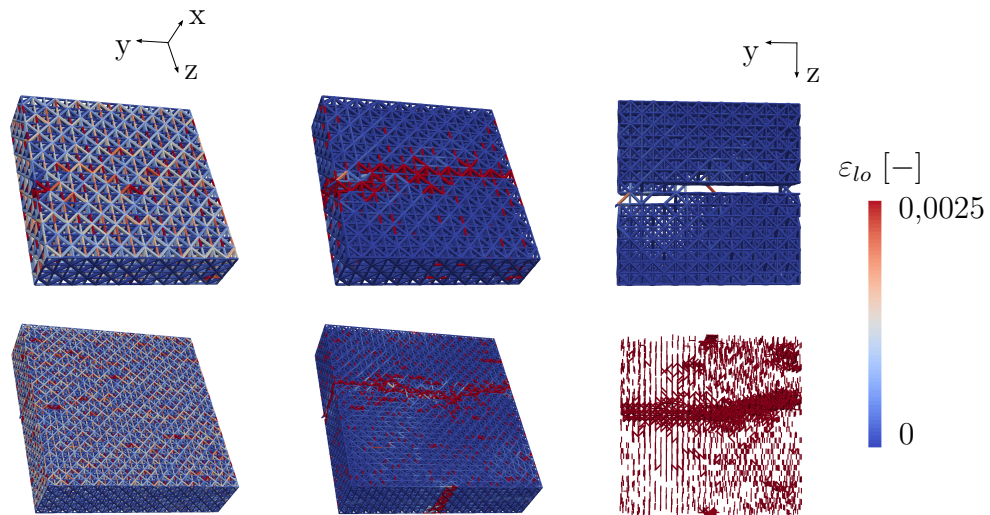


Bild 4.14: Versagensbilder von KUPFER-Scheiben unter einachsigem Zug

4.5 Simulation von mehrachsialen Belastungen

Neben den einachsialen Belastungen waren KUPFER und ZELGER [45] am Verhalten von Beton unter biachsialen Spannungszuständen interessiert. Zusätzlich zu den Zugversuchen aus Abschnitt 4.4 werden in diesem Abschnitt weitere ein- und biachsiale Belastungen auf die Betonscheiben aufgebracht. Die zwängungsfreie Lagerung aus Abbildung 4.12 wird dabei in allen Fällen beibehalten. Die Belastungsgeschwindigkeiten der Ränder sind in folgender Tabelle 4.1 angegeben.

Tabelle 4.1: Belastungsgeschwindigkeiten der Ränder in [m/s]

Simulation	Rand			
	y = 0	y = 0,2	z = 0	z = 0,2
S1: (einachs. Zug)	frei	frei	-0,00025	0,00025
S2: (biachs. Zug)	-0,00025	0,00025	-0,00025	0,00025
S3: (einachs. Druck)	frei	frei	0,00025	-0,00025
S4: (einachs. Druck, gehalten)	0	0	0,00025	-0,00025
S5: (biachs. Druck, schräg)	0,0001	-0,00025	0,00025	-0,00025
S6: (biachs. Druck)	0,00025	-0,00025	0,00025	-0,00025
S7: (Zug - Druck)	-0,0001	0,0001	0,00025	-0,00025

Jede Simulation nach Tabelle 4.1 wird zwei mal durchgeführt, um verlässlichere Ergebnisse bezüglich der Streuung zu erhalten. In Abbildung 4.15 sind die Ergebnisse der Simulation S2 für biachsialen Zug dargestellt.

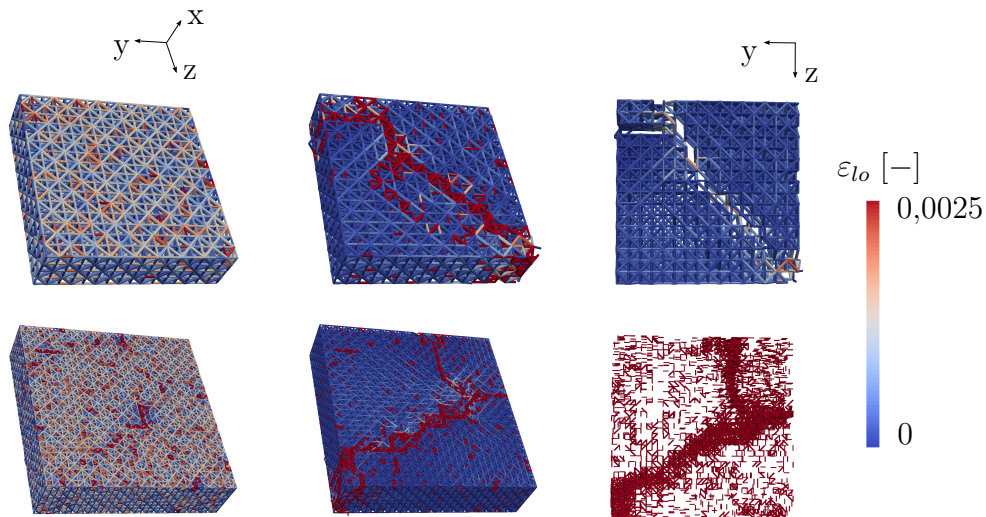


Bild 4.15: Versagensbilder von KUPFER-Scheiben unter biachsialem Zug (Simulation S2 aus Tabelle 4.1)

Die Scheibe versagt durch einen diagonalen Trennriss spröde. Der Riss startet in einer Ecke und pflanzt sich in einem 45° -Winkel fort. In welcher Ecke der Riss initiiert wird und in welche Richtung sich der Riss einstellt, ist von lokalen Schwachstellen abhängig. An der oberen rechten Ecke der Scheibe mit 1024 Einheitszellen teilt sich der Riss kurz vor der vollständigen Trennung noch in zwei Risse auf und endet an den beiden Außenflächen in z- sowie y-Richtung. Am Beispiel der Diskretisierung mit 128 Einheitszellen ist in Abbildung 4.16 die Rissfortpflanzung dargestellt.

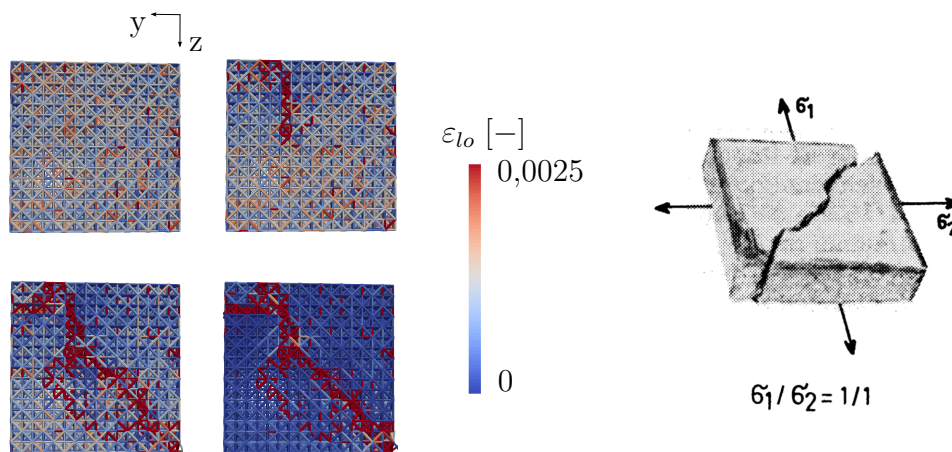


Bild 4.16: Rissentwicklung von KUPFER-Scheiben unter biachsialem Zug und experimentelle Ergebnisse aus [45]

Während sich der Riss fortpflanzt, nehmen die lokalen Verzerrungen in der Betonscheibe ab, da diese entlastet wird. Ist das Kontinuum vollständig getrennt, entstehen zwei spannungs- und dehnungsfreie Teilstrukturen. Das experimentelle Ergebnis

aus Abbildung 4.16 zeigt ein sehr ähnliches Versagensbild wie die Simulationen. Auch hier pflanzt sich der Riss diagonal durch die Scheibe fort. Das Spannungs-Dehnungs-Verhalten entspricht qualitativ dem Verlauf unter einachsialer Zugbeanspruchung und ist in den Diagrammen in Abbildung 4.17 dargestellt.

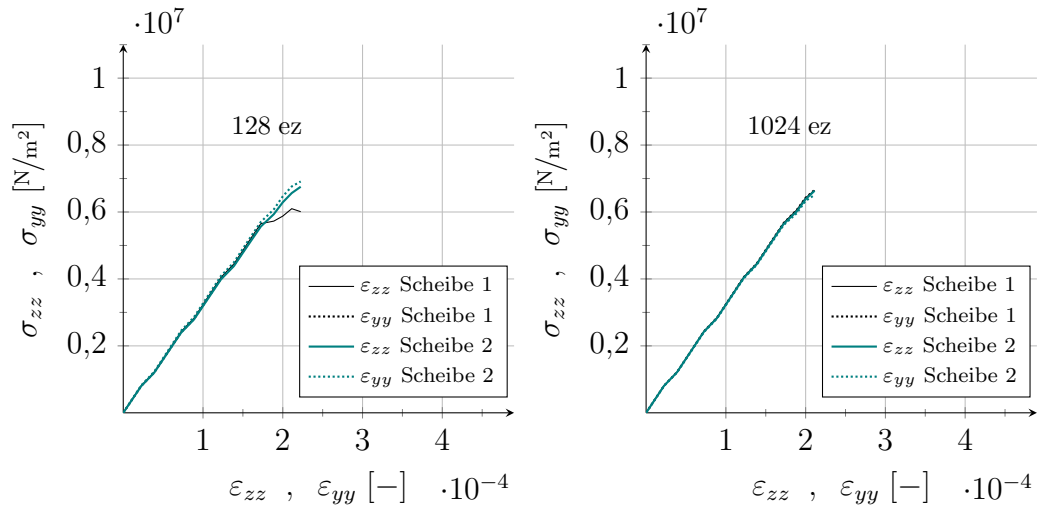


Bild 4.17: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für biachsiale Zugversuche

Wie bei den einachsialen Zugversuchen versagen die Betonscheiben auch unter biachbialem Zug sehr spontan und ohne nennenswerte nichtlineare Annäherung des Spannungs-Dehnungs-Verlaufes an eine Bruchlast. Die erreichte Bruchlast ist für die Elementierungen mit 128 bzw. 1024 Einheitszellen wie bei den einachsialen Belastungen nahezu identisch.

Auch die Versagensmechanismen unter Druckbelastung können mit der DEM-Simulation gut nachgebildet werden. In Abbildung 4.18 ist die Betonscheibe unter einachsialem Druck beim Erreichen der Bruchlast dargestellt. Das seitliche Abplatzen des Materials unter einem oder zwei diagonalen Rissen, siehe Referenz in Abbildung 4.18, ist deutlich erkennbar. Zur Veranschaulichung ist in Abbildung 4.18 die Betonscheibe nach dem Versagen mit (oben rechts) und ohne (unten) die gerissenen Kontakte dargestellt.

Die Trennung des Kontinuums und der damit verbundene Abfall der lokalen Verzerrungen ist erkennbar. Am linken Rand der Scheibe treten noch geringe Verzerrungen nach dem Erreichen der Bruchlast auf, da im linken Trennriss noch Kräfte über Kollisionen übertragen werden können. Nach kurzer Weiterbelastung schert jedoch auch dieser Teil ab.

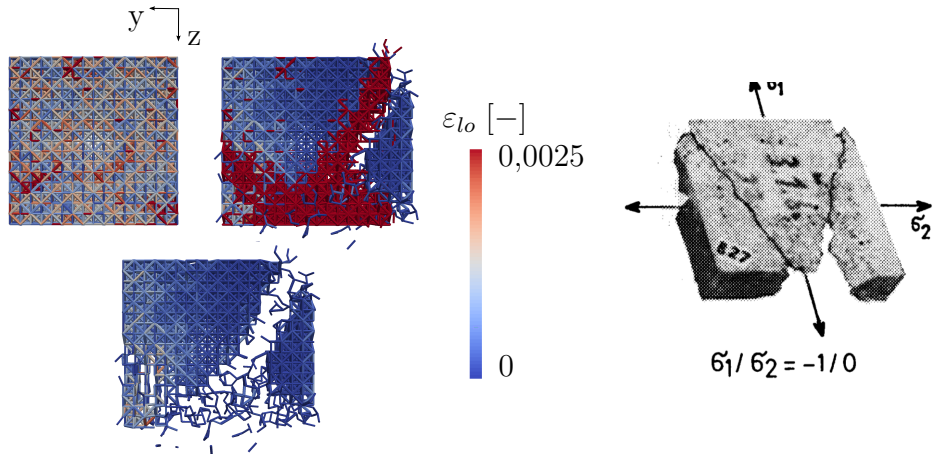


Bild 4.18: Versagensbild der Simulation S3 nach Tabelle 4.1 und experimentelle Ergebnisse aus [45]

Während bei Zug- sowie einachsialen Druckversuchen Risse senkrecht zu den freien Oberflächen entstehen, treten bei den mehrachsialen Druckversuchen laut KUPFER und ZELGER [45] hauptsächlich Risse parallel zu diesen Seiten auf. Es kommt zu schlagartigen Abplatzungen in x-Richtung. In Abbildung 4.19 sind die Bruchbilder für die Simulationen S4 und S6 mit 128 Einheitszellen dargestellt.

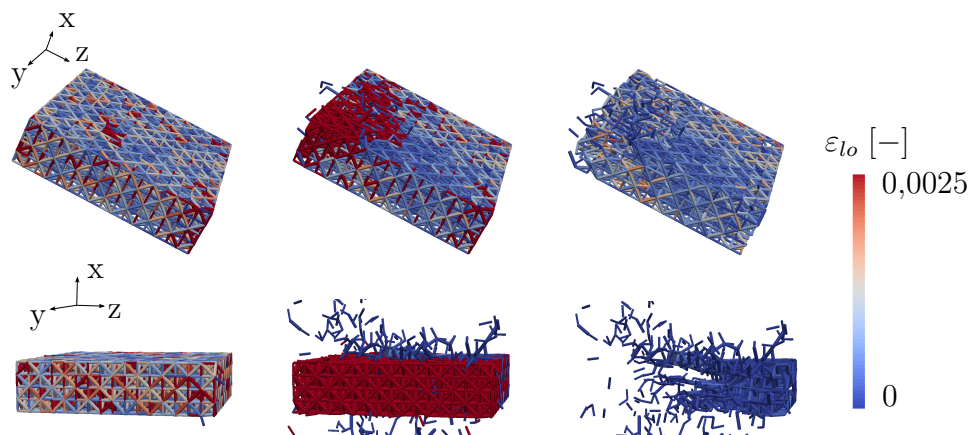


Bild 4.19: Versagensbilder der Simulationen S4 (oben) und S6 (unten) nach Tabelle 4.1

Beide Simulationen zeigen ein ähnliches Versagensbild. Im Gegensatz zu den zugbeanspruchten Scheiben aus den Abbildungen 4.15 und 4.14 reißen zunächst hauptsächlich Kontakte in x-Richtung aufgrund von Querkzug. Für die Simulation S4 sind am Rand bei $y = 0,2$ [m] vor dem Versagen bereits einige gerissene Kontakte zu sehen. Das Bruchversagen tritt schlagartig ein und der obere Teil der Scheibe platzt

in x-Richtung ab. Dieses Verhalten deckt sich mit dem von KUPFER und ZELGER beobachteten Bruchbild, siehe Abbildung 4.20a. Bei den biachsialen Druckversuchen der Simulation S6 wird die Betonscheibe im Moment des Erreichens der Bruchlast nahezu vollständig zerstört. Es ist erkennbar, dass sich die Scheibe in der y-z-Ebene trennt und Betonteile sowohl in x- als auch in negative x-Richtung abplatzen. Die Trennung in der y-z-Ebene kann auch bei den experimentellen Versuchen beobachtet werden, siehe Abbildung 4.20b.

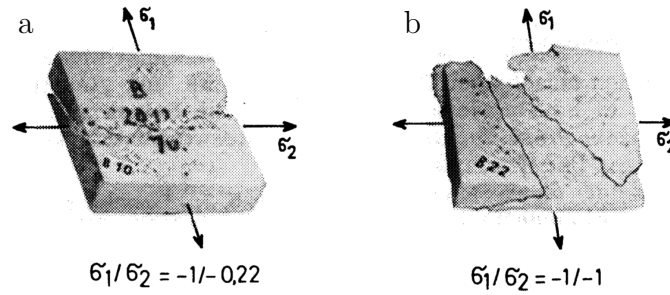


Bild 4.20: Bruchbilder unter schräg biachsialem (a) und gleichmäßig biachsialem (b) Druck aus [45]

Fasst man die Bruchlasten für alle Simulationen zusammen, können diese über die beiden Spannungen σ_{zz} und σ_{yy} beim Erreichen der Bruchlast aufgetragen werden. Die Spannungen werden dabei auf den Betrag der gemittelten Bruchlast $|f_{c,\mu}|$ aus den einachsialen Druckversuchen normiert. Die Bruchlast f_c einer Simulation entspricht dem betragsmäßig größten während der Simulation auftretenden Spannungswert σ_{zz} bzw. σ_{yy} . Die Ergebnisse der DEM Simulationen sind in Abbildung 4.21 dargestellt.

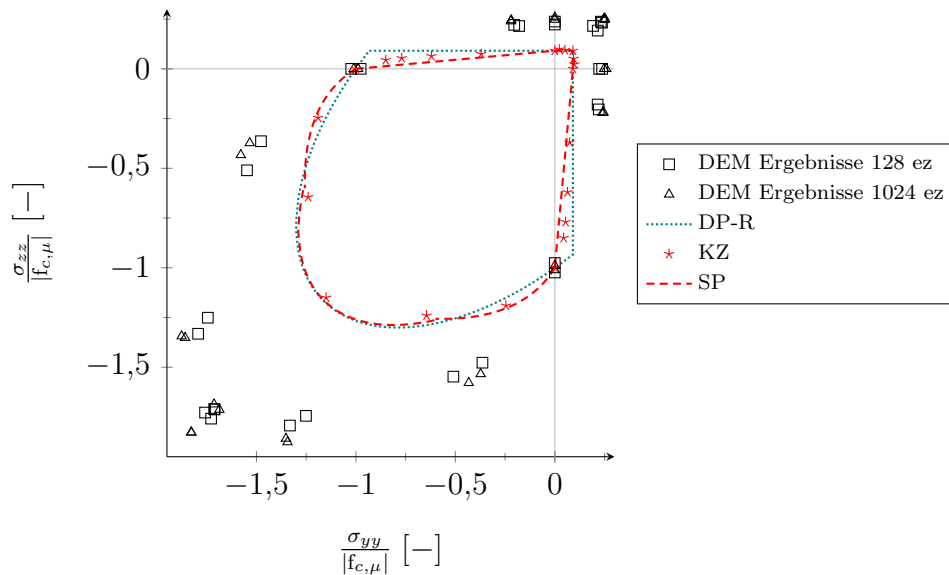


Bild 4.21: Versagensflächen und DEM-Ergebnisse für KUPFER-Scheiben

Als Referenz ist die kombinierte DRUCKER-PRAGER-RANKINE Fläche (DP-R) angegeben. Das DRUCKER-PRAGER Kriterium ist im Druckbereich mit

$$f_{DP}(\boldsymbol{\sigma}) = \sqrt{J_2} + \alpha_{DP} I_1 - k_{DP} \quad (4.5)$$

gegeben. Darin sind I_1 und J_2 die Invarianten der effektiven Spannungen. Die Parameter des Modells,

$$k_{DP} = \frac{6c \cos(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))} \quad \text{und} \quad \alpha_{DP} = \frac{2 \sin(\phi)}{\sqrt{3}(3 - \sin(\phi))} , \quad (4.6)$$

werden über die Kohäsion c und den inneren Reibungswinkel ϕ an das Material angepasst. Für einen Normalbeton, wie in den Ergebnissen von KUPFER und ZELGER [45], können $c = 0,42 f_c$ und $\phi = 10^\circ$ gewählt werden. Dies entspricht z.B. nach MESCHKE [55] einem Verhältnis der bi- zur einachsialen Druckfestigkeit von $f_{c,b}/f_c = 1,16$. Im Zugbereich ist die Versagensfläche über das RANKINE Kriterium

$$f_R(\boldsymbol{\sigma}) = \sigma_{R,v} - f_t \quad (4.7)$$

begrenzt. Gleichung (4.7) begrenzt die Hauptspannungen im Zugbereich auf die Zugfestigkeit des Materials. Als weitere Referenz sind in Abbildung 4.21 die Versuchsergebnisse von KUPFER und ZELGER (KZ) sowie eine Versagensfläche für diese Ergebnisse aus SPECK (SP) [75] angegeben. Die Versagensfläche nach SPECK besteht aus mehreren Funktionen, die die Versuchsergebnisse bereichsweise abbilden können.

Die DEM Lösung in Abbildung 4.21 kann die Versagensfläche der Versuchsergebnisse qualitativ nachbilden. Die Bruchlasten im Druck-Druck sowie im Zug-Bereich werden jedoch jeweils überschätzt. Für die beiden Auflösungen mit 128 und 1024 Einheitszellen resultieren sehr ähnliche Versagensflächen, sodass von einer ausreichend feinen Elementierung ausgegangen werden kann. Um die Versagensfläche zu optimieren, wird zunächst der Einfluss des Modellparameters $\alpha_{\varepsilon n}$ auf die Spannungsverhältnisse untersucht. Die Werte für $f_{c,b}/f_c$ und f_t/f_c in Abhängigkeit des Modellparameters sind in Abbildung 4.22 dargestellt.

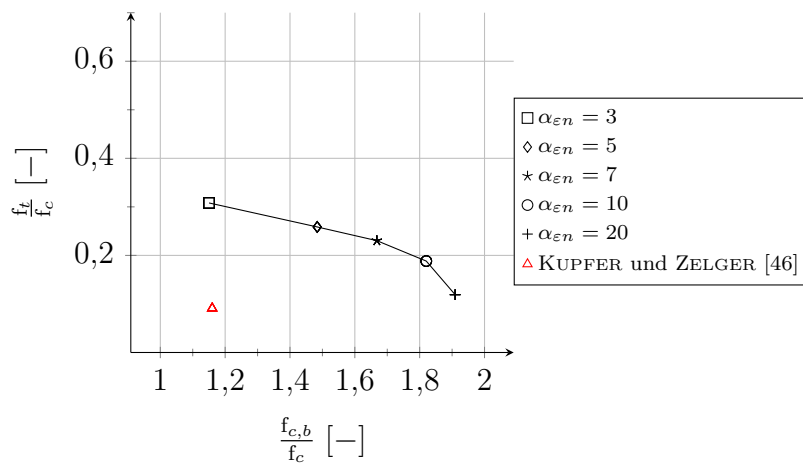


Bild 4.22: Einfluss des Parameters $\alpha_{\varepsilon n}$ auf die Bruchlasten

Das Diagramm 4.22 zeigt den Einfluss des Parameters $\alpha_{\varepsilon n}$ auf die Bruchlasten der Betonscheiben. Die Verhältnisse $f_{c,b}/f_c = 1,16 [-]$ und $f_t/f_c = 0,091 [-]$, die den Ergebnissen der KUPFER-Scheiben entsprechen, können nicht gleichzeitig erreicht werden. Eine Erhöhung von $\alpha_{\varepsilon n}$ verstärkt die Rissbildung unter Zugbeanspruchung und verringert damit das in Abbildung 4.21 überschätzte Verhältnis f_t/f_c . Gleichzeitig erhöht sich jedoch das Verhältnis $f_{c,b}/f_c$, da beim einachsialen Belastungszustand die Kontakte auf Querkzug früher versagen, diese jedoch beim biachsialen Zustand überdrückt werden und nur einen geringen Einfluss auf das Versagen haben. Aufgrund der sinkenden einachsialen Druckfestigkeit bei nahezu gleichbleibender biachsialer Druckfestigkeit steigert sich das Verhältnis $f_{c,b}/f_c$ für größere $\alpha_{\varepsilon n}$.

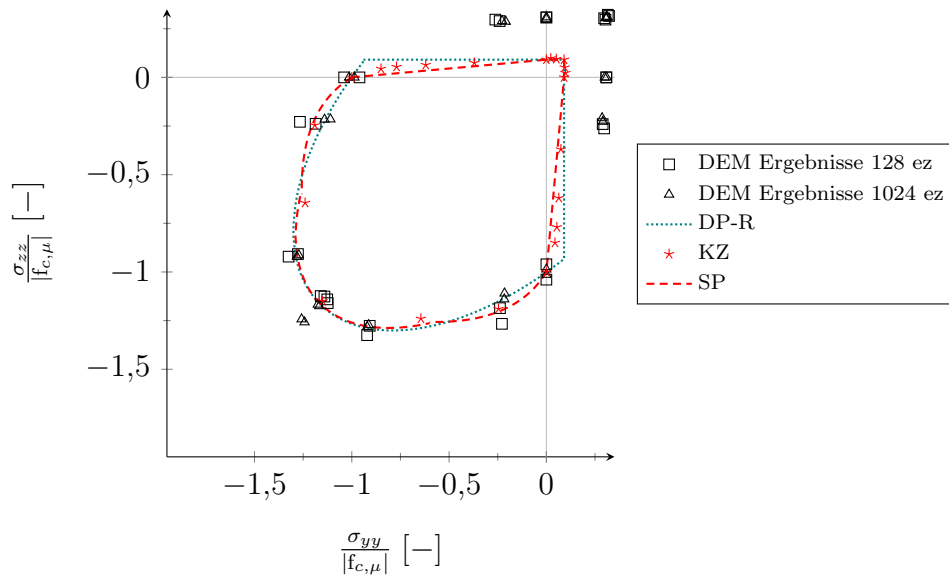


Bild 4.23: Versagensflächen und DEM-Ergebnisse für $\alpha_{\varepsilon n} = 3$

Die Bruchlasten können nicht unabhängig durch den Modellparameter angepasst werden, da für steigende $\alpha_{\varepsilon n}$ das Versagen des Betons im diskreten DEM Modell sowohl unter Zug- als auch Druckbeanspruchungen auf demselben Mechanismus beruht. Das Versagenskriterium lokaler Verzerrungen in Kombination mit der gewählten regelmäßigen Partikelanordnung der kubisch dichtesten Packungslage sorgen dafür, dass Kontakte, die Zugverzerrungen erfahren, ob in Belastungsrichtung oder durch Querkzug, zuerst aufreißen und es im Anschluss zu einem spröden Bauteilversagen kommt. Da das Versagenskriterium eines Kontaktes lediglich die in Kontakttrichtung auftretenden Normal- sowie die senkrecht dazu stehenden Schubverzerrungen einbezieht, hat der Spannungs- bzw. Verzerrungszustand quer zum betrachteten Kontakt keinen Einfluss auf das Erreichen des Kriteriums. Der vollständige Verzerrungszustand im Kontaktbereich zwischen zwei Partikeln wäre notwendig, um mit einem zweiten Modellparameter Druck- und Zugbereich individuell anpassen zu können. Die Verzerrungen in Querrichtungen sind allerdings im Sinne der DEM nicht vorhanden. Ein zweiter Modellparameter, um beispielsweise die bekannten lokalen

Schubverzerrungsanteile zu wichten, kann den Bereich der möglichen Kombinationen an Spannungsverhältnissen aus Abbildung 4.22 nur geringfügig erweitern.

Wählt man anhand der Ergebnisse aus Abbildung 4.22 den Parameter $\alpha_{\varepsilon n} = 3 [-]$, ergibt sich die in Diagramm 4.23 dargestellte Versagensfläche. Das DEM-Modell ist in der Lage den mit dem DRUCKER-PRAGER Kriterium abgedeckten Druck-Bereich gut zu approximieren. Das RANKINE Kriterium kann jedoch nicht gleichzeitig erfüllt werden.

Das diskrete Modell eignet sich bedingt, um Beton in verschiedenen Belastungszenarien bis zum Bruch zu simulieren. Bruchbilder aus experimentellen Versuchen können mit den numerischen Berechnungen gut abgebildet werden, jedoch wird die Zugfestigkeit oder die biaxiale Druckfestigkeit für Normalbeton überschätzt.

5 Modellierung faserverstärkter Materialien

Das spröde Materialverhalten von Beton und insbesondere UHPC erfordert duktilitätssteigernde Maßnahmen in der baupraktischen Anwendung. Wenn Bauteile oder sogar ganze Bauwerke spontan und ohne optische Vorankündigung versagen, stellt dies ein großes Sicherheitsrisiko dar. Neben einfachen Bewehrungen von Betonbauteilen wird im Zuge der Entwicklung neuer Hochleistungsbetone immer wieder auf Faserverstärkungen zurückgegriffen. Der Betonmatrix werden bereits im Mischprozess Fasern zugeschlagen. Diese Art der Bewehrung macht den Baustoff noch flexibler in der Formgebung und vielseitiger in der Anwendung. In diesem Kapitel wird ein Modell für das Verhalten von Fasern entwickelt und in das bestehende DEM Modell implementiert.

5.1 Modellerweiterung

Faserzuschläge haben einen vernachlässigbar kleinen Einfluss auf die Druckfestigkeit von Beton, siehe z.B. SCHMIDT und FEHLING [69]. Erst im gerissenen Zustand des Betons leisten sie einen Beitrag zum Lastabtrag. Das DEM Modell mit der Bruchbedingung aus Abschnitt 4.2 wird demnach um einen Teil nach dem Erreichen der maximalen lokalen Verzerrungen erweitert.

Entsteht ein Riss im Material und die Fasern nehmen die freiwerdenden Spannungen auf, kann an dieser Stelle ein eindimensionales reines Zugtragverhalten angenommen werden. Fasern haben aufgrund ihrer Abmessungen nahezu keine Schubsteifigkeit und können deshalb keine Kräfte in Querrichtung aufnehmen. Weiterhin weichen Fasern bereits unter kleinen Druckbelastungen stabilitätsbedingt aus. Daher wird ausschließlich eine Steifigkeit in Kontaktnormalenrichtung und diese auch nur im Zugbereich angesetzt. Die Modellbildung ist vergleichbar mit der in Abschnitt 2.2.2 vorgestellten Wasserbrückenmodellierung bei kohäsiven Medien.

Zunächst wird ein rheologisches Element auf Grundlage der Eigenschaften der Stahlfasern sowie deren Verbund im Beton entwickelt und anschließend die Implementierung vorgestellt.

5.1.1 Materialverhalten

Für Faserverstärkungen können verschiedene Werkstoffe verwendet werden. Neben den verbreiteten Stahlfasern kommen auch Kunststoff- oder Glasfasern zum Einsatz. Eine Übersicht liefert z.B. WIĘTEK in [84]. Der im baupraktischen Bereich verbreitetste Werkstoff für Fasern ist jedoch Stahl. Die Verwendung von Drahtfasern bietet

viele Vorteile. Sie zeichnen sich durch eine gute Verarbeitbarkeit aus, da sie sehr glatt sind und sich damit gut untermischen lassen, siehe z.B. SPECK [75]. Ein Verleimen der Fasern zu Paketen vor dem Mischvorgang verhindert zusätzlich Phänomene wie die Igelbildung, da sich die Fasern nicht verhaken. Trotz der glatten Oberfläche ist auch der Verbund in der Betonmatrix in der Regel sehr gut. In diesem Abschnitt wird auf der Grundlage dieser Überlegungen ein vereinfachendes Materialmodell für Stahl vorgestellt, um das Verhalten der Fasern zu erfassen.

Der Werkstoff Stahl bietet in der Regel große plastische Reserven. Abgesehen von besonderen, hochfesten Stählen, die zu spröderem Versagen neigen, zeichnen sich die meisten Stähle durch eine hohe Duktilität aus. Dieses Verhalten soll genutzt werden, um das spröde Versagen von Beton abzufangen und ein duktiles Bauteilversagen zu erhalten. Das qualitative Spannungs-Dehnungs-Verhalten von Stahl sowie eine abgeleitete Vereinfachung ist in folgendem Diagramm 5.1 dargestellt.

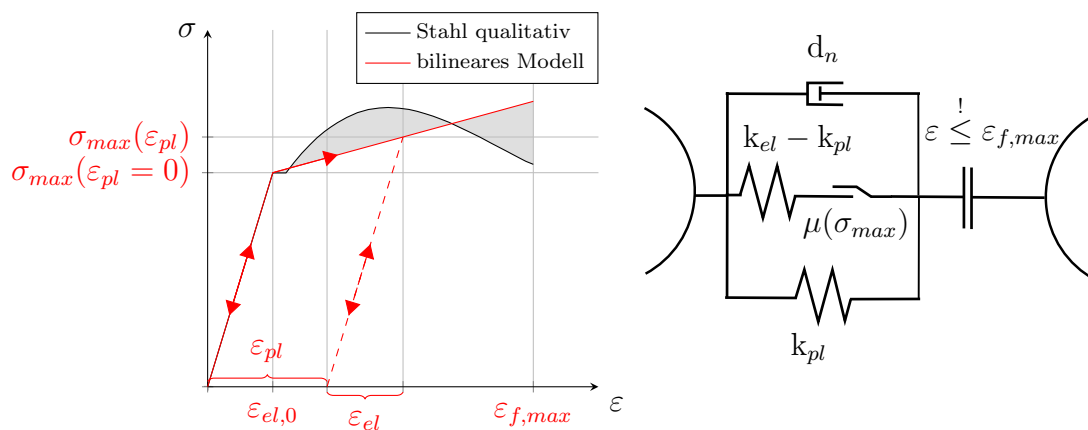


Bild 5.1: Qualitative Spannungs-Dehnungs-Verläufe für Stahl und rheologisches Element

Die Fasern werden mit einem bilinearem Materialmodell mit isotroper Verfestigung modelliert, um die Tragreserven von Stahl beschreiben zu können. Der nichtlineare Verfestigungsbereich von Stahl wird linear approximiert. Damit die Materialreserven hinsichtlich Dissipationsarbeit nicht über- oder unterschätzt werden, muss darauf geachtet werden, dass die grau hinterlegte Fläche zwischen den Kennlinien im Integral null ergibt. So wird bei einer Belastung bis zum Bruch in beiden Fällen die gleiche Arbeit geleistet. Aus dem Spannungs-Dehnungs-Verhalten kann das rheologische Element aus Abbildung 5.1 entwickelt werden. Die parallel geschalteten Federn bilden in Kombination mit dem Reibelement, welches aktiv wird, sobald die momentane Fließgrenze $\sigma_{max}(\varepsilon_{pl})$ erreicht wird, das bilineare Materialverhalten ab. Zusätzlich werden parallel ein Dämpfungselement sowie vorgeschaltet eine Bruchbedingung für die maximalen Verzerrungen implementiert.

5.1.2 Verbundverhalten

Der Verbund von Fasern und Betonmatrix ist von hoher Bedeutung für das Verhalten des Werkstoffes. Sind die Fasern fest in der Matrix integriert, können diese nach dem Aufreißen des Betons hohe Zugkräfte aufnehmen. Werden die Fasern jedoch leicht ausgezogen, kann es zu ähnlich spröden Versagensformen wie bei unbewehrtem Beton kommen. Für den Verbund zwischen Stahl und Beton sind chemische sowie mechanische Effekte verantwortlich. Maßgebend bei Stahlfasern ist in der Regel die mechanische Haftung in der Betonmatrix. Abhängig von der Faserform sowie möglicher Endverankerungen unterscheidet sich das Auszugverhalten von Fasern. Im Diagramm 5.2 sind zwei qualitative Kraft-Schlupf-Verläufe für den Faserauszug dargestellt.

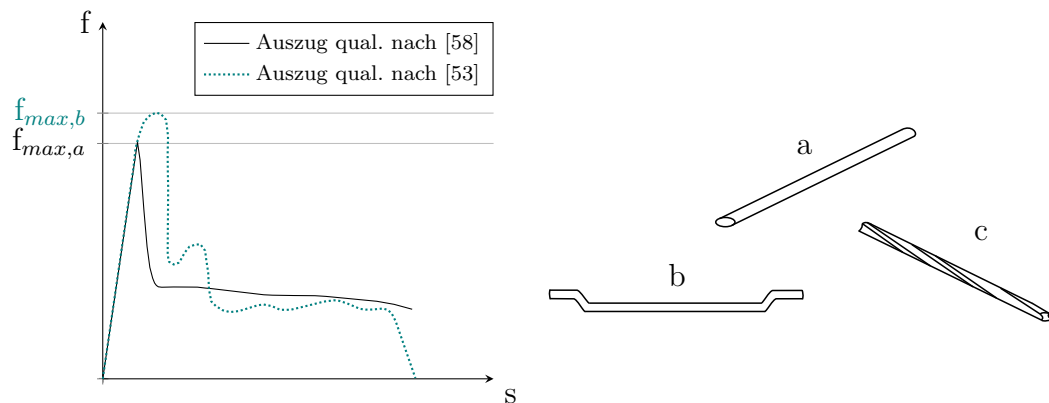


Bild 5.2: Qualitative Kraft-Schlupf-Verläufe und Fasertypen: Gerade (a), mit Haken (b) und Verdreht (c) nach KIM ET AL [40]

Die erste Kennlinie zeigt den qualitativen Auszug einer geraden Stahlfaser (siehe Abbildung 5.2a) aus einer HPC Matrix nach NAAMAN und NAJM [58]. Nachdem die Haftreibung überschritten ist, kommt es zu einem Auszug auf einem nahezu konstanten Lastniveau, welches deutlich unterhalb der maximalen Auszugskraft $f_{max,a}$ liegt. Die zweite Kennlinie aus MARKOVICH ET AL [53] stellt den Kraft-Schlupf-Verlauf für eine Faser mit Endhaken aus Abbildung 5.2b dar, die aus Normalbeton sowie mikrofaserbewehrtem Hybridbeton ausgezogen wird. Hierbei muss für einen Auszug aus der Matrix zunächst der Haken an zwei Stellen umgebogen werden und es entsteht der charakteristische Verlauf mit zwei Hochpunkten zu Beginn der Belastung. Nachdem der Haken ausgezogen wurde, verhält sich die Faser wie die zuvor beschriebene gerade Faser, und wird bei konstanter Last ausgezogen.

Je fester die Betonmatrix ist, desto besser sind die Fasern integriert und können effektiver ausgenutzt werden. WILLE und NAAMAN untersuchen in [85, 86] das Verbundverhalten von hochfesten Stahlfasern in UHPC und kommen zu einem Ergebnis, bei dem der Abfall der Kurve in der Kraft-Schlupf-Beziehung ausbleibt. Da die Fasern nach dem Erreichen von f_{max} weiterhin bei konstanter Last ausgezogen werden, kann

eine Verfestigung des Verbundes angenommen werden. Wenn die Verankerungslänge bei konstanter Kraft geringer wird, steigt die Schubspannung im Verbund. Sowohl CHAN und CHU [8] als auch WILLE und NAAMAN [85, 86] stellen nach dem vollständigen Auszug Kratzspuren auf der Faseroberfläche fest. Diese erhöhen den Reibwiderstand und sorgen für einen besseren Verbund. Weitere Nachforschungen zur Verbundverfestigung stellen KIM ET AL [40] vor, die das Phänomen vor allem bei verdrehten Fasern, siehe Abbildung 5.2c, feststellen. Ein qualitativer Kraft-Schlupf-Verlauf für Fasern mit Verbundverfestigung ist in Diagramm 5.3 dargestellt.

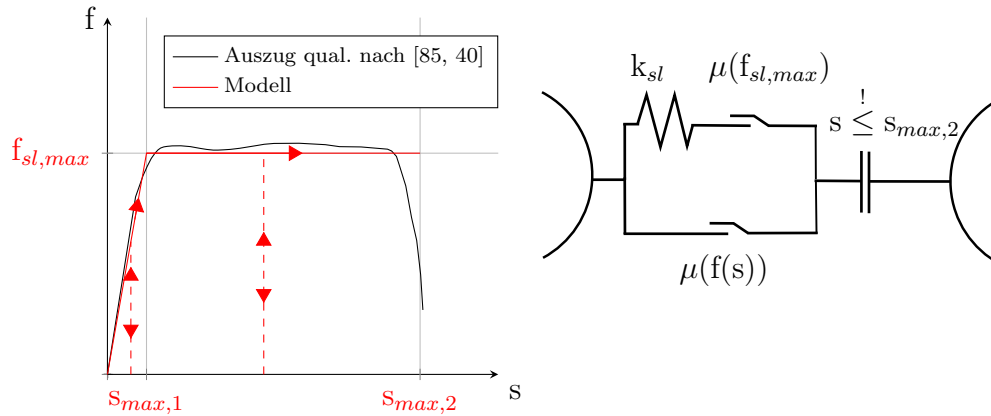


Bild 5.3: Qualitative Kraft-Schlupf-Verläufe mit Verbundverfestigung und rheologisches Element

Mit den Erkenntnissen über die Verbundverfestigung wird in der vorliegenden Arbeit das in Abbildung 5.3 dargestellte Verbundmodell gewählt. Zu Beginn der Belastung kommt es zu einem quasilinearen Auszug bis die maximale Last erreicht ist. Danach wird die Faser unter gleichbleibender Last ausgezogen. Der Schlupf s des Verbundes ist zu jedem Zeitpunkt irreversibel. s bleibt bei einer Ent- oder Belastung in die Gegenrichtung konstant. Das Verhalten ist in Abbildung 5.3 mit einem rheologischen Element realisiert. Die Federsteifigkeit k_{sl} beschreibt den linearen Bereich zu Beginn des Auszuges. Das parallel geschaltete Reibelement ist abhängig von der zugehörigen Kraft des aktuellen Schlupfes und sorgt dafür, dass der Schlupf irreversibel ist. Sobald $f_{sl,max}$ erreicht ist, wird ein zweites mit der Feder in Reihe geschaltetes Reibelement aktiv. Die parallelen Reibelemente sind ab diesem Zeitpunkt identisch, da $f(s) = f_{sl,max}$. Die Faser wird danach bei konstanter Last ausgezogen. Vorgeschaltet ist eine Auszugbedingung für s , bei der der Verbund gelöst wird.

5.1.3 Implementierung

In Abbildung 2.1 ist ein vereinfachtes Ablaufschema für Simulationen mit der DEM dargestellt. Der erste der drei Abschnitte, die in jedem Zeitschritt durchgeführt werden, besteht aus dem Auffinden und Auswerten aller Kontakte. Neben Kollisionen freier Partikel sowie den Kontakten aus initial verbundenen Partikeln kommt in diesem Kapitel die Auswertung von Faserkontakten hinzu. Das neue Schema der Kontaktauswertung ist in Abbildung 5.4 dargestellt.

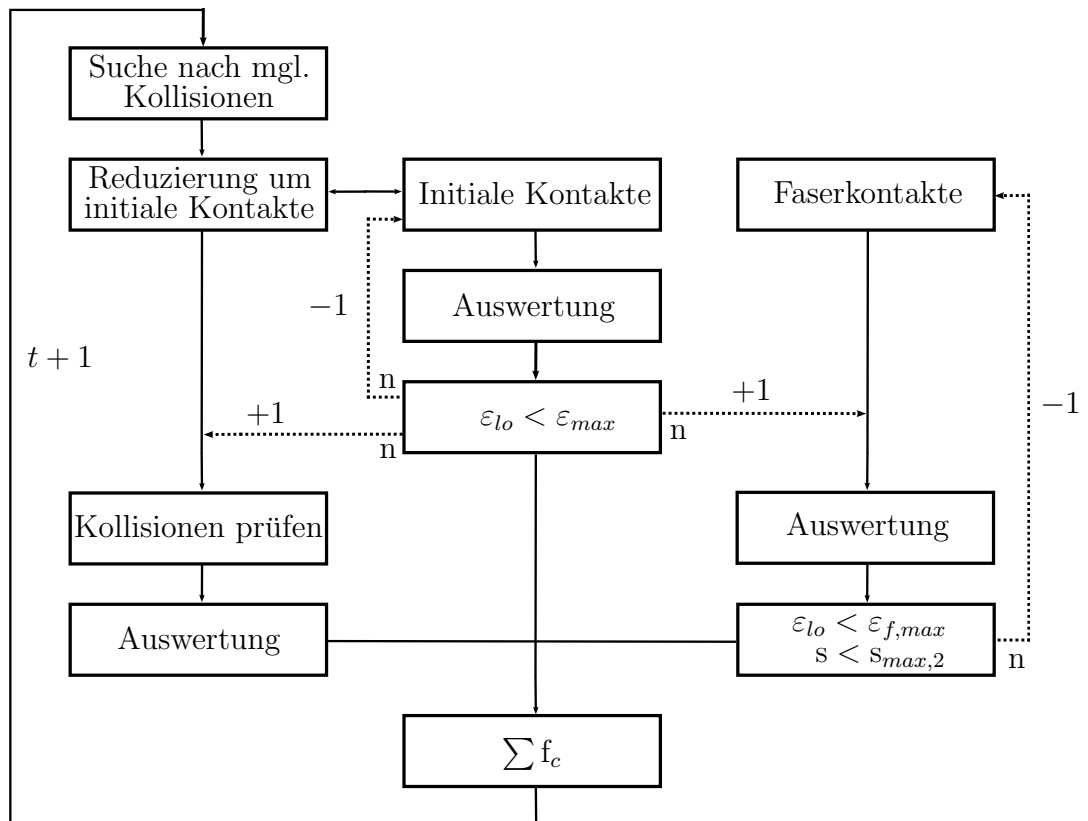


Bild 5.4: Schematischer Ablauf der Kontaktauswertung

Sowohl die Auswertung der Kollisionen als auch der Faserkontakte bedingt eine vorangeschaltete Auswertung aller Festkörperkontakte, da hieraus neue Objekte der anderen Kontakte entstehen können. Die Auswertung der Faserkontakte beruht auf einem kombinierten rheologischen Element der Abschnitte 5.1.1 und 5.1.2, welches in Abbildung 5.5 dargestellt ist.

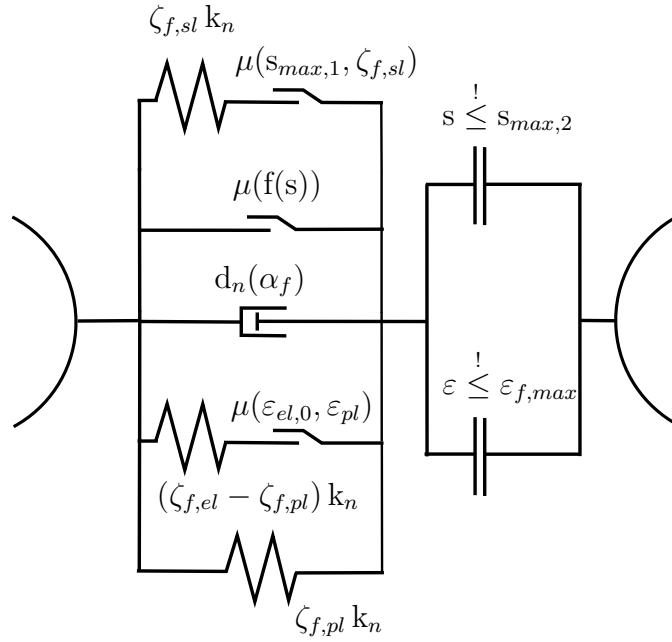


Bild 5.5: Kombiniertes rheologisches Element für einen Faserkontakt

Als zusätzliche Materialparameter für den Verbundwerkstoff kommen die Steifigkeitsfaktoren $\zeta_{f,el}$, $\zeta_{f,pl}$ und $\zeta_{f,sl}$, die Verzerrungen $\varepsilon_{el,0}$ und $\varepsilon_{f,max}$, die Schlupfparameter $s_{max,1}$ und $s_{max,2}$ sowie ein Dämpfungsmaß α_f hinzu. Die Steifigkeiten der Fasern sowie des Auszuges werden mit Anteilen ζ an der Betonsteifigkeit definiert. $\zeta_{f,el}$ repräsentiert dabei die Menge und Festigkeit der Fasern, $\zeta_{f,pl}$ beschreibt den Verfestigungsast der Fasern und $\zeta_{f,sl}$ steht für die Integration der Fasern in die Betonmatrix. Die Verzerrungsparameter definieren die Materialeigenschaften des Stahls. Die Schlupfparameter legen einen möglichen Auszug fest. Zur Validierung des Modells wird im Folgenden ein Miniaturbeispiel zweier initial verbundener Partikel untersucht. Das Beispiel sowie die gewählten Parameter sind in Abbildung 5.6 dargestellt.

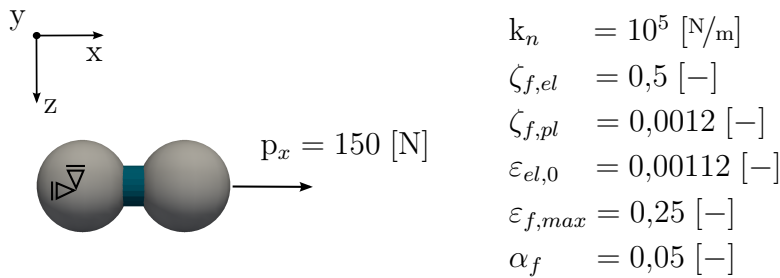


Bild 5.6: Miniaturbeispiel für einen Faserauszug

Zwei Partikel sind mit einem Kontakt der Steifigkeit k_n verbunden. Ein Partikel ist in allen Raumrichtungen gehalten und das zweite wird durch eine über 50 [s] gesteigerte Last bis zu einem Wert von $p_x = 150 \text{ [N]}$ in x - Richtung belastet. Die Verzerrungen $\varepsilon_{el,0}$ und $\varepsilon_{f,max}$, sind so gewählt, dass ein qualitatives Materialverhalten von Stahl

entsprechend Abbildung 5.1 erreicht wird. Für das Verhältnis der Parameter $\zeta_{f,el}$, $\zeta_{f,pl}$ gilt

$$\frac{\zeta_{f,pl}}{\zeta_{f,el}} \stackrel{!}{=} \frac{\varepsilon_{el,0}(1 - \frac{f_y}{f_u})}{\frac{f_y}{f_u}(\varepsilon_{f,max} - \varepsilon_{el,0})} . \quad (5.1)$$

Darin sind f_y die Streckgrenze und f_u die maximale Zugfestigkeit des gewählten Stahls. Gleichung (5.1) stellt sicher, dass der qualitative Verlauf des Materials entsprechend Abbildung 5.1 unabhängig von der Menge der Fasern $\zeta_{f,el}$ ist. Wird $\zeta_{f,el}$ verändert, muss auch $\zeta_{f,pl}$ entsprechend Gleichung (5.1) angepasst werden, damit das Materialverhalten des gewählten Stahls erhalten bleibt und beim Plastifizieren des Stahls die richtige Menge Energie dissipiert wird. Die Auszugbedingung wird in einer zweiten Berechnung hinzugefügt.

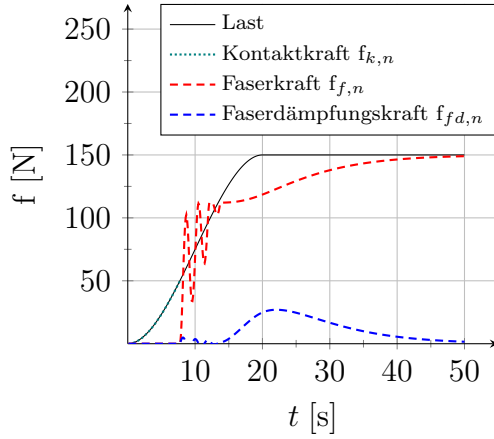


Bild 5.7: Kraft-Zeit-Verläufe

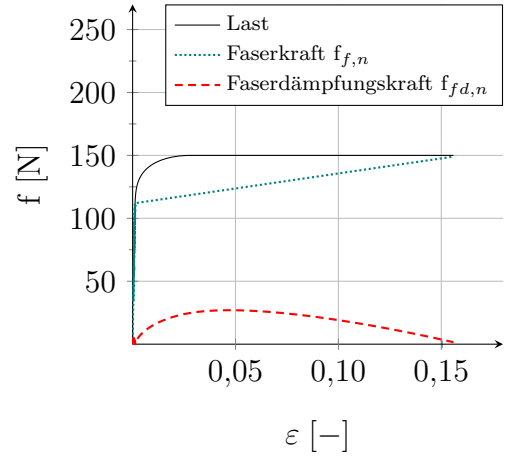


Bild 5.8: Kraft-Verzerrungs-Verläufe

Bei $t = 8$ [s] wird die lokale Verzerrung für den initialen Kontakt überschritten, sodass der Kontakt reißt. Die Faser wird aktiv und die Faserkraft setzt sich ins Gleichgewicht mit der aufgebrachten Last. Durch das schlagartige Aktivieren der Faser entsteht eine dynamische Anregung für das System, sodass die Faserkraft zunächst um den Gleichgewichtszustand oszilliert. Bei einer Last von $p_x = 112$ [N] fängt der Stahl an zu fließen. In der Folge wird Energie dissipiert. Das belastete Partikel wird beschleunigt und durch die auftretenden Geschwindigkeiten entstehen hohe Dämpfungskräfte. Das Diagramm 5.8 zeigt den großen Anteil an plastischen Verzerrungen. Bei der maximal erreichten Verzerrung $\varepsilon = 0,1559$ [-] entspricht der plastische Anteil $\varepsilon_{pl} = 0,1544$ [-]. Erweitert man das Miniaturbeispiel um eine Auszugbedingung mit den Parametern $\zeta_{f,sl} = 0,14$ [-], $s_{max,1} = 0,001$ [m] und $s_{max,2} = 0,04$ [m] ergeben sich geringe Veränderungen in der Faserantwort.

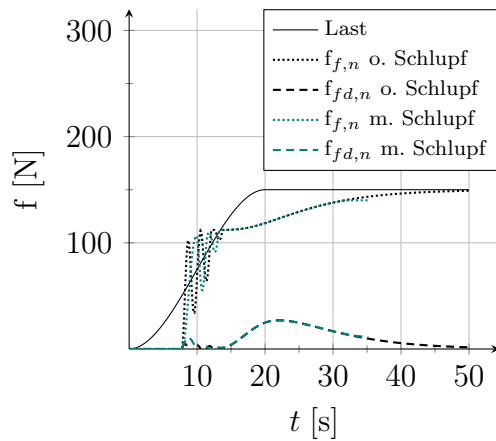


Bild 5.9: Kraft-Zeit-Verläufe mit Schlupfbedingung

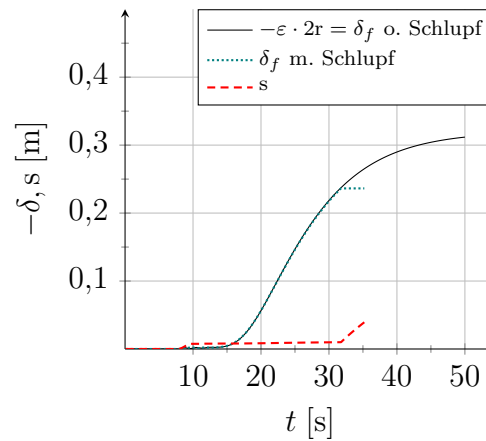


Bild 5.10: Verschiebungs-Zeit-Verläufe

Die Diagramme 5.9 und 5.10 veranschaulichen den Einfluss der Auszugbedingung. Bei einer Last $p_x = f_{sl,max} = 140$ [N] kann keine weitere Last mehr aufgenommen werden, da die Faser ausgezogen wird. Vorher kommt es durch den Schlupf lediglich zu einer leichten Phasenverschiebung der Oszillation. Bei $t = 35$ [s] ist die Faser vollständig ausgezogen, und die Partikel werden getrennt. Das Diagramm 5.10 stellt den Verlauf der Überlappung δ_f bzw. des Schlupfes s im Zeitbereich dar. Nach einem geringen Auszug durch die spontane Belastung zum Zeitpunkt des Aufreißens wird der Schlupf leicht linear gesteigert und nimmt mit Erreichen von $f_{sl,max}$ schnell zu. Diagramm 5.11 zeigt, dass durch das frühere Ausziehen der Faser weniger Energie dissipiert wird, da die plastischen Reserven des Materials nicht vollständig genutzt werden können.

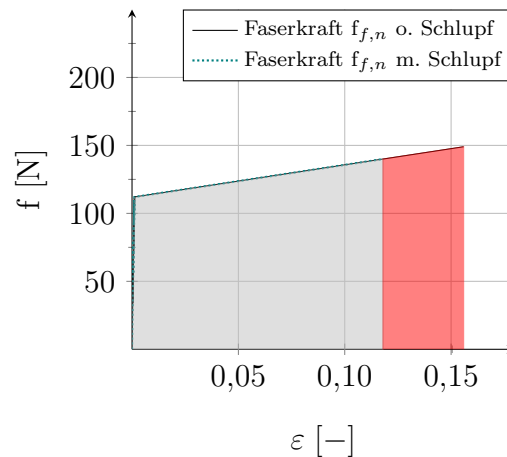


Bild 5.11: Kraft-Verzerrungs-Verläufe mit und ohne Auszugbedingung

Bezogen auf die Abmessungen der Fasern entspricht der grau bzw. rot hinterlegte Bereich in Abbildung 5.11 der dissipierten Energie. Aufgrund des Auszuges bei

$p_x = 140 \text{ [N]}$ wird bei der zweiten Berechnung nur der graue Bereich dissipiert. Der rot hinterlegte Bereich entfällt durch das vorzeitige Auflösen des Faserkontaktes.

Die Parameter sind so gewählt, dass die maximale Auszugskraft $f_{sl,max}$ im Bereich der Plastifizierung der Fasern liegt. Dieser kombinierte Versagenszustand stellt einen Sonderfall dar. In der Regel ist nur einer der beiden Versagensmechanismen maßgebend. Liegt $f_{sl,max}$ unterhalb der Streckgrenze der Fasern, bedeutet dies, dass die Materialreserven nicht ausgenutzt werden können, und der Auszug maßgeblich für das Verhalten des Betons verantwortlich ist. Liegt $f_{sl,max}$ oberhalb der Bruchlast reißen die Fasern bevor diese ausgezogen werden, sodass die Auszugbedingung nur geringen Einfluss hat. Die Parameter können angepasst werden, je nachdem wie fest die Fasern durch Endverankerung oder Betonfestigkeit in der Matrix integriert sind. Das Modell bleibt damit variabel für verschiedene Faser- und Materialarten.

Es wird impliziert, dass die Fasern im Bauteil perfekt verteilt sind, da die Fasern über die Faktoren $\zeta_{f,el}$, $\zeta_{f,pl}$ und $\zeta_{f,sl}$ als ein Anteil der lokalen Betonsteifigkeit k_n definiert werden und in jedem Kontakt gleich sind. Diese Voraussetzung ist nicht immer zutreffend, da eine gleichmäßige Untermischung der Fasern nur schwer umzusetzen ist. Der Mischprozess stellt große Herausforderungen an die Verfahrenstechnik und beinhaltet immer eine hohe Unsicherheit. Verfahren, die den Fasergehalt, die Verteilung sowie Ausrichtung im Nachhinein kontrollieren können, werden zum Beispiel von SCHNELL ET AL in [71] vorgestellt, sind aber in der Regel sehr aufwändig. Eine unregelmäßige Verteilung oder eine Richtungsabhängigkeit der Fasern könnte im vorliegenden Modell durch die Anpassung der Faktoren ζ durch Abhängigkeiten

$$\zeta = \zeta(\mathbf{e}_n^{ij}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (5.2)$$

vom Ort der Partikel und Richtung des Kontaktes berücksichtigt werden. Für die folgenden Berechnungen werden die Faktoren ζ für das Material als konstant angenommen.

5.2 Druckversuche an faserverstärktem UHPC

In diesem Abschnitt werden Druckprüfungen von UHPC-Proben mit und ohne Faserverstärkungen simuliert. Der Einfluss der Modellparameter wird dargestellt, und das Materialverhalten bei ansteigendem Fasergehalt untersucht. Zunächst wird der Fasergehalt ohne Auszugbedingung variiert. In einem zweiten Schritt ist in Abschnitt 5.2.3 die Auszugbedingung hinzugefügt.

5.2.1 Modellierung

UHPC stellt neben den auch für Beton geltenden Randbedingungen weitere Herausforderungen an die Herstellung geeigneter Probekörper. Würfel und Zylinder mit den Abmessungen von experimentellen Untersuchungen an Normalbeton können häufig nicht verwendet werden, da die für ein Bruchversagen notwendige Kraftaufbringung

von herkömmlichen Prüfmaschinen nicht mehr geleistet werden kann. Es werden in der Regel kleinere Probekörper verwendet, wobei wie bei Normalbeton ebenfalls Würfel und Zylinder zum Einsatz kommen. GRAYBEAL und DAVIS untersuchen in [29] die Eignung verschiedener Würfel und Zylinderproben. Sie kommen zu dem Ergebnis, dass sich Zylinder mit den Durchmessern 10,2 [cm] und 7,6 [cm] sowie Würfel mit der Kantenlänge 10,0 [cm] für die Ermittlung der Druckfestigkeit eignen. Bestehen auch für diese Abmessungen noch Grenzen der Prüfeinrichtungen könnten auch Würfel mit einer Kantenlänge von 7,07 [cm] verwendet werden und über einen Faktor in die Ergebnisse entsprechender größerer Proben überführt werden. Die Ergebnisse kleinerer Probekörper mit einer Kantenlänge bzw. einem Durchmesser von 5,1 [cm] streuen stark und sind deshalb nicht geeignet. In den folgenden Abschnitten wird ein Würfel mit der Kantenlänge 10,0 [cm] untersucht. Der Würfel wird mit vier Einheitszellen je Richtung und damit mit 729 Partikeln und 3672 initial verbundenen Kontakten aufgelöst.

UHPC ist deutlich homogener als Normalbeton. Aus diesem Grund werden die Faktoren für die Betonsteifigkeit ζ_k mit einer geringeren Standardabweichung $\sigma_s = 0,3 [-]$ gestreut. Die Simulationen basieren auf dem in Abbildung 4.2 dargestellten Modell mit beweglichen Wänden zur Simulation einer Druckprüfung in herkömmlichen hydraulischen Prüfmaschinen. Die Materialparameter für UHPC werden nach z.B. SCHMIDT und FEHLING [69] mit $E = 5 \cdot 10^{10} [\text{N/m}^2]$ und $\nu = 0,18 [-]$ festgelegt.

5.2.2 Einfluss des Fasergehaltes

Zunächst wird der Einfluss der Fasermenge bzw. des Parameters $\zeta_{f,el}$ untersucht. In Tabelle 5.1 sind fünf Simulationen für Würfel mit unterschiedlichem Fasergehalt angegeben. Die weiteren Fasermodeparameter $\varepsilon_{el,0}$ und $\varepsilon_{f,max}$ bleiben für alle Simulationen konstant. Eine Auszugbedingung bzw. die Schlupfparameter bleiben zunächst in allen Simulationen unberücksichtigt. Der Dämpfungsparameter der Fasern wird mit $\alpha_f = 0,05 [-]$ festgelegt. Als weitere Modellparameter werden die Parameter für die Bruchbedingung $\alpha_{\varepsilon n} = 3 [-]$ sowie $\varepsilon_{max} = 0,0038 [-]$ gewählt. Der Parameter $\alpha_{\varepsilon n}$ ist in Abschnitt 4.5 erläutert.

Tabelle 5.1: Simulationen von faserverstärkten UHPC Würfeln

Simulation	Steifigkeitsfaktoren [-]			Fasermodeparameter			
	$\zeta_{f,el}$	$\zeta_{f,pl}$	$\zeta_{f,sl}$	$\varepsilon_{el,0} [-]$	$\varepsilon_{f,max} [-]$	$s_{max,1} [\text{m}]$	$s_{max,2} [\text{m}]$
SF1	0,0	0,0					
SF2	0,01	$2,39 \cdot 10^{-5}$					
SF3	0,1	$2,39 \cdot 10^{-4}$	-	0,00112	0,25	-	-
SF4	0,2	$4,78 \cdot 10^{-4}$					
SF5	0,5	$1,12 \cdot 10^{-3}$					

Die maximal ertragbare lokale Verzerrung ε_{max} ist bei UHPC höher als bei Normalbeton und sorgt mit dem ebenfalls höheren Elastizitätsmodul sowie der geringeren Heterogenität dafür, dass ein Mehrfaches der Bruchlasten von Normalbeton erreicht werden kann.

Das Diagramm 5.12 zeigt die Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Simulationen aus Tabelle 5.1. Den Ergebnissen können mehrere Phänomene entnommen werden. Für $\zeta_{f,el} = 0,0$ [–] handelt es sich um reinen UHPC, der trotz leichter Streuung der Parameter extrem spröde versagt. Nach dem Erreichen der Bruchlast von etwa $f_c = 1,85 \cdot 10^8$ [N/m²] fällt die Spannung auf einen Wert von null ab. Dieses Verhalten ist typisch für ultrahochfeste Betone und entspricht experimentellen Ergebnissen, siehe z.B. SCHMIDT und FEHLING [69]. Das gleiche Verhalten zeigt auch die Simulation SF2 mit minimalem Fasergehalt.

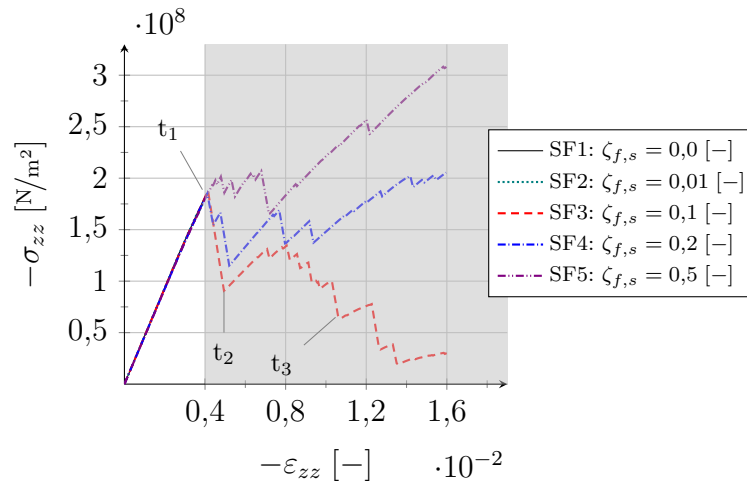


Bild 5.12: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für faserverstärkte UHPC-Würfel

Auch bei einem Faserzuschlag von $\zeta_{f,el} > 0,01$ [–] in den Simulationen SF3 und SF4 wird die maximale Bruchlast zunächst nicht beeinflusst. Für die Simulationen SF3 und SF4 verändert sich im Gegensatz zu SF1 und SF2 lediglich der grau hinterlegte Bereich nach dem Erreichen der Bruchlast. Die Fasermenge ist ausreichend, um eine duktilitätssteigernde Wirkung zu erreichen. Statt des spontanen Bruchversagens des Würfels zeigen die Spannungs-Dehnungs-Verläufe einen entfestigenden Bereich nach dem Erreichen der Bruchlast. Dieses Phänomen entspricht dem in Experimenten beobachteten Verhalten, siehe z.B. HASSAN ET AL [31] oder SCHMIDT und FEHLING [69]. Bei der Simulation SF4 ist im späteren Verlauf des Nachbruchbereichs noch eine verfestigende Wirkung zu beobachten. Die Verläufe von SF3 und SF4 zeigen zu Beginn qualitativ ein ähnliches Verhalten. Nach dem Erreichen der Bruchlast folgt ein schnell entfestigender Bereich, bei dem die Fasern erstmalig aktiviert werden. In dem Moment, in dem es bei unbewehrtem Beton zu Kantenabplatzungen kommt, werden die Fasern aktiv und halten den Würfel zusammen. Das erstmalige Aktivieren

der Fasern geht mit einem Spannungs- sowie Steifigkeitsabfall des Würfels einher. Nachdem die Fasern aktiviert sind, steigt die Spannung wieder entsprechend eines geringeren Verbund-Elastizitätsmoduls, bis es zu weiteren aufreißenden Kontakten kommt und zusätzliche Fasern aktiviert werden. Die Steigung der lokalen Verfestigungsäste der Nachbruchbereiche nimmt mit zunehmender Schädigung des Würfels ab. Da nach dem Aufreißen des Betons aufgrund der Stahlfasern wesentlich größere lokale Verzerrungen für den Verbundwerkstoff möglich sind, kann der Würfel trotz abnehmender Steifigkeit weiter belastet werden.

Für Simulation SF5 kann die Spannung nach dem Erreichen der bisherigen Bruchlast noch weiter gesteigert werden. Man spricht in diesem Fall von einem überkritischen Fasergehalt bzw. Tragverhalten, siehe z.B. OETTEL und EMPELMANN [61]. Fasernmen-gen, die zu einem überkritischen Tragverhalten in Druckversuchen führen, werden jedoch in der Regel aus wirtschaftlichen und verfahrenstechnischen Gründen nicht eingesetzt.

Die Schädigung des Würfels aus SF3 an den in Diagramm 5.12 markierten Zeitpunkten $t_1 = 1,32$ [s], $t_2 = 1,33$ [s] und $t_3 = 2,43$ [s] ist in Abbildung 5.13 dargestellt.

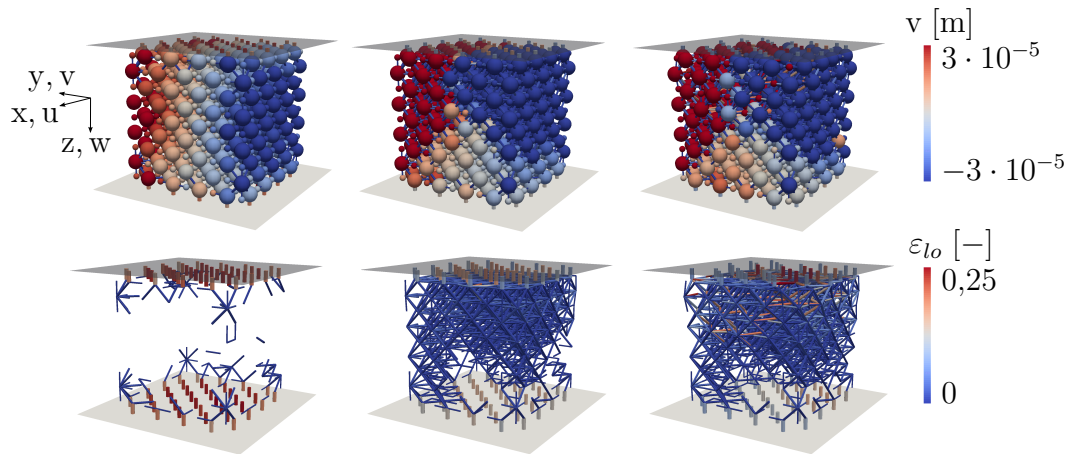


Bild 5.13: Zustände des Würfels aus SF3 bei $t_1 = 1,32$ [s], $t_2 = 1,33$ [s] und $t_3 = 2,43$ [s]

Die obere Zeile von Abbildung 5.13 zeigt den Verschiebungszustand der Partikel in einer Querrichtung zu den drei Zeitpunkten. Beim ersten Spannungsabfall zwischen $t_1 = 1,32$ [s] und $t_2 = 1,33$ [s] kommt es zu großflächigen Abplatzungen der Kanten im oberen Bereich des Würfels, die jedoch von den Fasern abgefangen werden. Die Fasern, die dabei aktiviert werden, sind in der zweiten Zeile der Abbildung 5.13 dargestellt. Innerhalb des Würfels entsteht eine komplexe Fasertragstruktur. Zum Zeitpunkt $t_3 = 2,43$ [s] ist der Würfel fast vollständig geschädigt. Die Steigung der Spannungs-Dehnungs-Kennlinie ist bei der Weiterbelastung des Würfels aus Diagramm 5.12, deutlich geringer als im ungerissenen Zustand oder nach dem Zeitpunkt $t_2 = 1,33$ [s]. Mit zunehmender Würfelschädigung stellen sich in den

Fasern große lokale Verzerrungen ein, die bis zur vorgegebenen Bruchdehnung des Stahls von $\varepsilon_{f,max} = 0,25$ [–] reichen, sodass die Fasern reißen. Der Würfel weist am Ende der Belastung keine nennenswerte Tragfähigkeit mehr auf. Ein sprödes Versagen konnte jedoch durch die Fasern verhindert werden.

5.2.3 Einfluss der Auszugbedingung

In diesem Abschnitt wird die Simulation SF3 aus Abschnitt 5.2.2 um eine Auszugbedingung erweitert. Die Kraft, bei der die Fasern plastifizieren, ist mit

$$f_{pl} = \zeta_{f,el} k_n \varepsilon_{el,0} (r_i + r_j) \quad (5.3)$$

für jeden Kontakt gegeben. Der Parameter $f_{sl,max}$, bei der die Faser ausgezogen wird, kann an diesen Wert angepasst werden, um je nach Anwendung die plastischen Reserven der Fasern auszunutzen oder nicht zu berücksichtigen. In Tabelle 5.2 sind die Parameter für SF3 mit variabler Auszugbedingung angegeben. $\zeta_{f,sl}$ wird bei konstanten Schlupfparametern $s_{max,1}$ und $s_{max,2}$ variiert, sodass eine unterschiedlich feste Integration in der Betonmatrix untersucht werden kann. Die Parameter für das Materialverhalten der Fasern bleiben in allen Simulationen identisch.

Tabelle 5.2: Simulationen von faserverstärkten UHPC Würfeln mit Auszugbedingung

	Steifigkeitsfaktoren [–]			Fasermodeparameter			
Simulation	$\zeta_{f,el}$	$\zeta_{f,pl}$	$\zeta_{f,sl}$	$\varepsilon_{el,0}$ [–]	$\varepsilon_{f,max}$ [–]	$s_{max,1}$ [m]	$s_{max,2}$ [m]
SF3A1	0,1	$2,39 \cdot 10^{-4}$	0,005	0,00112	0,25	0,0001	0,01
SF3A2			0,01				
SF3A3			0,02				
SF3A4			0,05				
SF3A5			0,1				

Als Referenz für die Simulationen SF3A1 bis SF3A5 ist in Abbildung 5.14 die Simulation SF3 ohne Auszugbedingung mit angegeben. Der Wert $\zeta_{f,sl} = 0,2$ [–] der Simulation SF3A3 entspricht nach Gleichung (5.3) einem Auszug kurz nach Beginn des Plastifizierens. Der Auszug hat bei geringeren Werten von $\zeta_{f,sl}$ einen großen Einfluss auf die Duktilität. Aufgrund des frühen Auszuges werden die maximal elastisch aufnehmbaren Kräfte sowie die plastischen Reserven der Fasern nicht genutzt. Der Würfel versagt aus diesem Grund in den Simulationen SF3A1 und SF3A2 sehr spröde. Bei Werten von $\zeta_{f,sl} > 0,2$ [–] sind die Veränderungen gegenüber der Simulation SF3 gering. Die Fasern sind stark in der Betonmatrix integriert und die Verbundwirkung hat einen geringen Einfluss auf das Nachbruchverhalten.

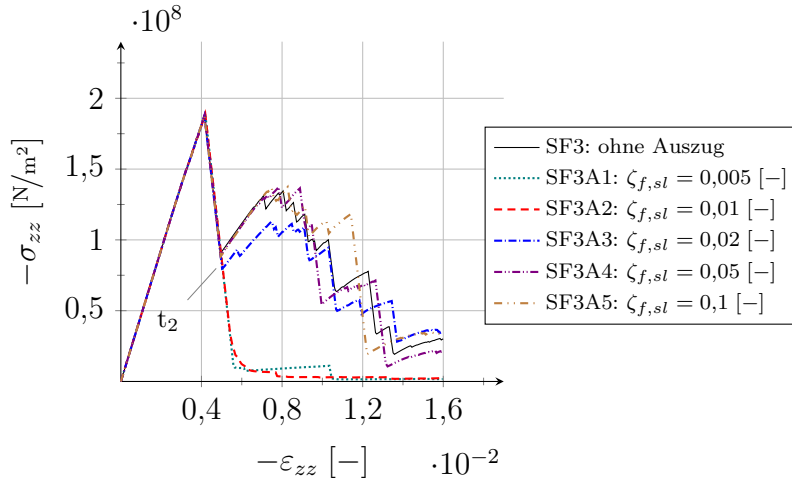


Bild 5.14: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für faserverstärkte UHPC-Würfel mit Auszugbedingung

Für Simulation SF3A3 ist der erste Spannungsabfall beim initialen Aufreißen des Betons größer als bei den Simulationen mit stärkerem Verbund. Die Spannungsspitzen durch das ruckartige Aufreißen des Betons verursachen einen Auszug einzelner Fasern, sodass auch die nachfolgende Wiederbelastung mit geringerer Steifigkeit erfolgt. In Abbildung 5.15 sind die Faserzustände zum Zeitpunkt $t_2 = 1,33$ [s] für die Simulationen SF3A3 und SF3A4 dargestellt.

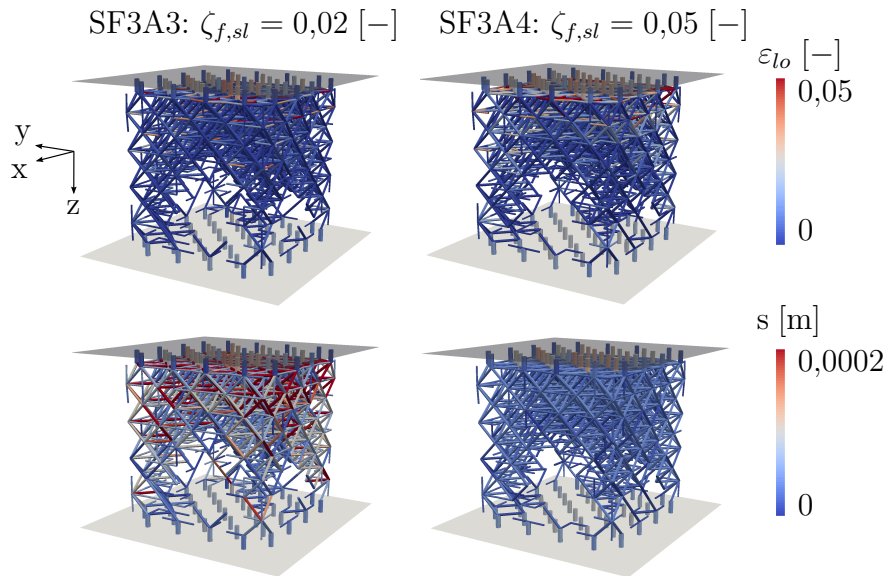


Bild 5.15: Zustände der Fasern bei $t_2 = 1,33$ [s]

Der Schlupf s ist bei der Simulation SF3A3 deutlich größer, da die Kräfte in den Fasern die maximale Kraft $f_{sl,max}$ während des Plastifizierens erreichen und die Fa-

ser ab diesem Zeitpunkt sehr schnell ausgezogen wird. Die lokalen Verzerrungen der Fasern unterscheiden sich nur geringfügig. In der Simulation SF3A4 sind die lokalen Verzerrungen in den Fasern größer als in SF3A3, da in der Simulation SF3A4 die globale Spannung σ_{zz} nach dem Spannungsabfall bei etwa gleicher globaler Verzerrung ε_{zz} größer ist als bei der Simulation SF3A3, siehe Abbildung 5.15.

Die Auszugbedingung hat maßgeblichen Einfluss auf das Versagensverhalten des faserverstärkten Werkstoffes. Eine zu schwache Integration der Fasern hebt deren Wirkung nahezu auf. Eine feste Integration in der Betonmatrix führt zu einer guten Ausnutzung der Werkstoffeigenschaften von Stahl und erlaubt eine hohe Duktilitätssteigerung des Verbundwerkstoffes.

5.3 Simulation von mehrachsialen Belastungen

Die Simulationen aus Abschnitt 4.5 werden in diesem Abschnitt unter Berücksichtigung einer Faserverstärkung erneut durchgeführt. Um den Einfluss der Fasern auf die Versagensfläche unter mehrachsialen Beanspruchungen zu ermitteln, werden zunächst die Materialparameter für die Betonscheiben aus Abschnitt 4.5 beibehalten und um eine Faserverstärkung mit den Parametern der Simulation SF3 aus Tabelle 5.1 erweitert. In einer zweiten Simulationsreihe werden die gleichen Belastungen auch auf Betonscheiben aus UHPC und faserverstärkten UHPC aufgebracht. Hierzu wird der Elastizitätsmodul auf $E = 5 \cdot 10^{10} \text{ [N/m}^2\text{]}$ und die maximal ertragbare lokale Verzerrung auf $\varepsilon_{max} = 0,0038 \text{ [-]}$ erhöht, sowie die Streuung der Steifigkeiten reduziert. Für die Faserverstärkung des UHPC werden ebenfalls die Parameter der Simulation SF3 aus Tabelle 5.1 verwendet. Die Versagensflächen der vier Simulationsreihen Normalbeton ohne Fasern aus Abschnitt 4.5 (C), Normalbeton mit Fasern (FRC), sowie ultrahochfester Beton ohne (UHPC) und mit Fasern (UHPFRC) sind in Abbildung 5.16 dargestellt.

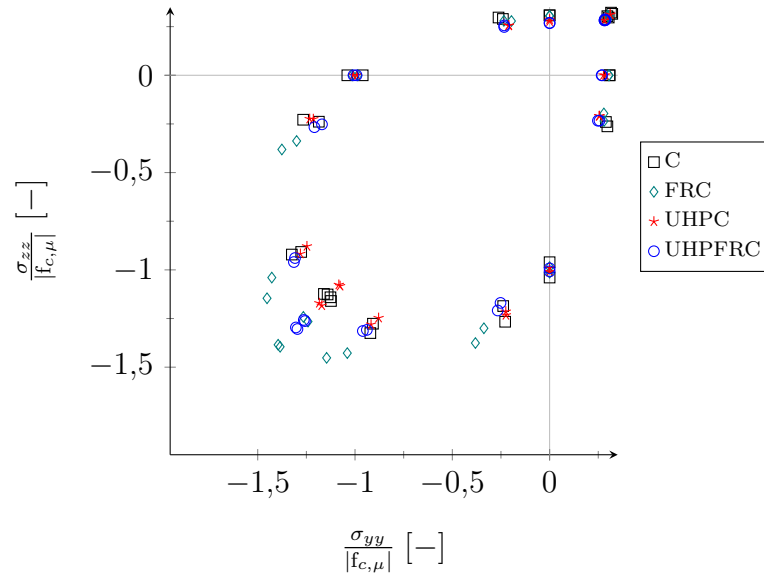


Bild 5.16: Versagensflächen für Betonscheiben mit und ohne Fasern

Das Verhältnis der ein- zur biachsialen Druckfestigkeit sinkt durch die spröderen Eigenschaften bei ultrahochfesten Betonen leicht, erhöht sich jedoch bei einem Faserzuschlag wieder, siehe z.B. CURBACH und SPECK in [16]. Diese Ergebnisse spiegeln sich in den Versagensflächen von Abbildung 5.16 wieder. Für die Erhöhung der Festigkeiten ist ein geringer Abfall und für den Zuschlag von Fasern eine Steigerung des Verhältnisses $f_{c,b}/f_c$ erkennbar.

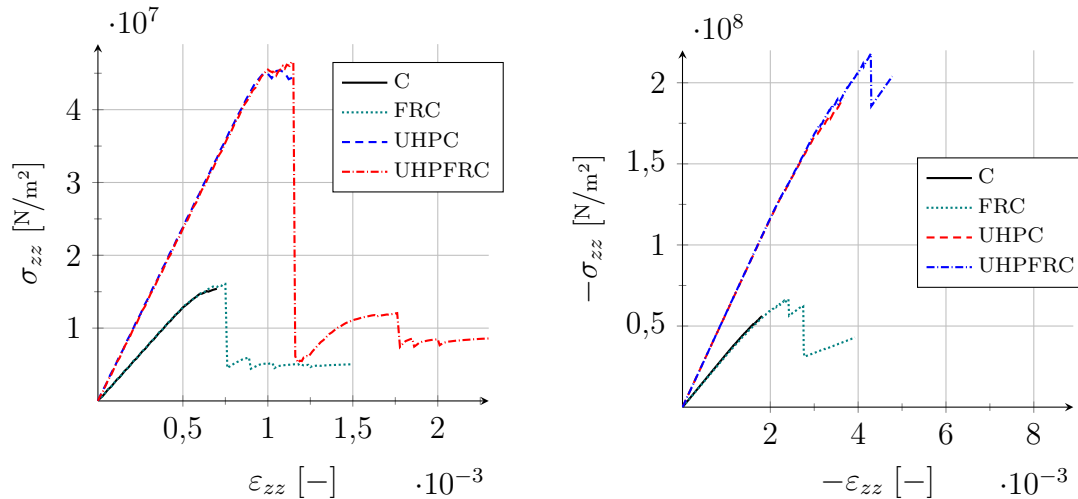


Bild 5.17: Spannungs-Dehnungs-Verläufe für einachsiale Zug- (links) und biachsiale Druckversuche (rechts)

Da die einachsiale Druckfestigkeit durch den Faserzuschlag in der Regel unberührt bleibt, müssen die Zug- sowie die biachsiale Druckfestigkeit gesteigert werden, wenn sich die Verhältnisse erhöhen, siehe z.B. PARK ET AL [63]. Die Spannungs-Dehnungs-Verläufe der Zug- bzw. biachsialen Druckversuche sind in den Diagrammen in Abbildung 5.17 dargestellt. Sowohl für Normalbeton als auch UHPC bewirkt der Faserzuschlag eine Erhöhung von f_t und $f_{c,b}$, wobei die Zugfestigkeit in beiden Fällen nur leicht gesteigert werden kann.

Die Ergebnisse der Zugversuche am FRC und UHPFRC aus Abbildung 5.17 zeigen, nachdem sich beim Erreichen der maximalen Spannung der horizontale Trennriss eingestellt hat, noch Nachbruchbereiche in denen eine geringe Wiederbelastung möglich ist. Das Kontinuum wird zwar wie in Abschnitt 4.4 durch einen horizontalen Riss getrennt, jedoch werden die zwei Teile der Betonscheibe durch die Fasern weiterhin zusammengehalten. Die Ergebnisse für biachsiale Druckversuche zeigen neben der Steigerung der Bruchlast eine leichte Verbesserung der Duktilität. Der Spannungsabfall ist nach einem kurzen duktilen Nachbruchbereich jedoch vor allem beim UHPFRC weiterhin schlagartig. Im Gegensatz zu den unbewehrten Betonscheiben sorgen die Faserverstärkungen beim FRC und UHPFRC jedoch für ein Zusammenhalten der Struktur nach dem Spannungsabfall. Das Auseinanderplatzen der Scheiben kann vermieden werden.

Die Erweiterung des DEM Modells um Faserverstärkungen liefert viel versprechende Ergebnisse. Der Einfluss von Fasern auf hochfeste Materialien, der in der Literatur durch experimentelle Ergebnisse nachgewiesen ist, kann mit dem DEM Modell gut abgebildet werden. Die Fasern können die Duktilität des Verbundwerkstoffes erhöhen. Bei Druckprüfungen können langsame Entfestigungsbereiche anstelle der für UHPC üblichen schlagartigen Bruchversagen erreicht werden. Auch bei Zugversuchen kann nach dem Einstellen von Trennrissen noch Kraft über nicht ausgezogene Fasern übertragen werden. Die Modellparameter für die Fasern können so angepasst werden, dass jeder Fasergehalt bis hin zu einem überkritischen Tragverhalten abgebildet werden kann. Eine optionale Auszugbedingung macht das Modell für die Anwendungen an unterschiedlichen Fasern flexibel. Verschiedene Verankerungen sowie Faserlängen können hierüber berücksichtigt werden.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Die Modellierung von Normal- und Hochleistungsbeton sowie von faserverstärkten Sonderbetonen ist für das Bauwesen von großer Bedeutung. Auf Grundlage dieser Motivation erfolgt in der vorliegenden Arbeit die Modellierung und numerische Analyse von Beton und faserverstärktem Ultrahochleistungsbeton mit der Diskrete Elemente Methode.

Die Erweiterung der Modellgleichungen der DEM führt auf ein Modell zur Beschreibung dreidimensionaler Festkörper, basierend auf einem Modell für granulare Medien. Die makroskopischen Materialeigenschaften können über einen Vergleich von Energiedichten analytisch in die Modellparameter überführt werden. Die Entwicklung einer verbesserten Einheitszelle von Partikeln in der kubisch dichtesten Packungslage ermöglicht die Modellierung vollständig isotroper Werkstoffe unter großen Verschiebungen und Rotationen bei kleinen Verzerrungen mit der DEM. Die Aufteilung von Strukturen in Partikel bzw. Berechnungspunkte stellt einen diskontinuierlichen Ansatz zur Lösung eines Kontinuums dar.

Die räumlich diskontinuierliche Formulierung der DEM bietet den Vorteil, dass das Berechnungsgebiet während der Simulation getrennt werden kann. Ein Versagenskriterium für initiale Kontakte, basierend auf der Begrenzung lokaler Verzerrungen, ist in das vorhandene DEM Modell implementiert, um das materialspezifische Aufbrechen bzw. -reißen des Betons zu berücksichtigen. Experimentell erreichte Versagensbilder von Betonscheiben unter mehrachsialer Belastung können mit dem DEM Modell simuliert werden. Die Berücksichtigung von Faserzuschlägen führt auf eine Erweiterung des Modells nach dem Erreichen des Versagenskriteriums. Die physikalischen Eigenschaften von Fasern und deren Verbund in der Betonmatrix sind in einem rheologischen Element zusammengefasst und darüber in das bestehende Modell implementiert. Das Modell zur Beschreibung der Faserwirkung wird aktiv, sobald der Beton lokal aufreißt. Die Simulation von ultrahochfestem Beton mit Faserzuschlag liefert viel versprechende Ergebnisse, da die duktilitätssteigernde Wirkung von Fasern in der Betonmatrix gut abgebildet werden kann.

Das Modell der vorliegenden Arbeit sowie die DEM im Allgemeinen haben in mehrerer Hinsicht Potential für weiterführende Untersuchungen. Die DEM bzw. Partikelmethode sind gegenüber FEM verhältnismäßig neue Verfahren, die in den letzten Jahren deutlich an Popularität gewonnen haben. Viele Modelle werden entwickelt, um einzelne Phänomene zu beschreiben. Mehrfeldmodelle, die neben den mechanischen Eigenschaften auch gekoppelte chemische und thermische Prozesse betrachten, wären von großer Bedeutung für die Ingenieurpraxis und schaffen eine Motivation

für weitere Entwicklungen im Rahmen der DEM.

Die Alterung von Beton und damit gegebenenfalls eine Zustandsänderung von Tragwerken ist eine wichtige Fragestellung. Häufig sind Simulationen von langen Zeiträumen erforderlich, um eine Aussage über den Zustand bestehender Bauwerke treffen zu können, da die Belastungshistorie sowie Umwelteinflüsse berücksichtigt werden müssen. Die expliziten Lösungsverfahren in DEM Modellen erfordern in der Regel sehr kleine Zeitschritte, sodass die Simulation von großen Zeitspannen sehr aufwändig oder unmöglich ist. Diese Gegebenheit motiviert die Entwicklung geeigneter Skalierungsmethoden, um die Zeitschrittweiten entsprechend des betrachteten Zeitraumes anzupassen.

Das entwickelte Festkörpermodell hat zusätzlich zur Inkompressibilitätsgrenze, eine weitere Obergrenze für die Querdehnzahl ν . Die Grenze ist abhängig von der gewählten Packungslage, den Randbereichen des Modells sowie der Berücksichtigung von Rotationsfreiheitsgraden. Um die Methode allgemeingültiger und anwendbar für Materialien mit $\nu > 0,2$ zu machen, ist eine Erweiterung des Modells von großem Interesse.

Die implementierte Bruchbedingung kann für Beton nur einen eingeschränkten Bereich an Kombinationen von Druck- und Zugfestigkeiten erreichen. Die Versagensmechanismen der DEM Struktur sind für unterschiedliche Belastungen nicht unabhängig. Da durch die Formulierung der DEM lediglich der Verzerrungszustand in Kontaktnormalenrichtung bekannt ist, können die einzelnen Bruchlasten für verschiedene Belastungen nicht getrennt anhand von Parametern angepasst werden. Fortführende Untersuchungen zu erweiterten Versagenskriterien könnten eine Verbesserung des Modells ermöglichen.

In der ingenieurpraktischen Anwendung ist von hoher Bedeutung, den Berechnungsaufwand klein zu halten. Eine effiziente programmtechnische Umsetzung ist dafür unabdingbar. Neben einer Optimierung des Programmablaufes wäre eine weitere Parallelisierung der entwickelten Software von großem Mehrwert.

Anhang A

$$\mathbf{K}_{uc} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_1 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_2 & \hat{\mathbf{K}}_3 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \hat{\mathbf{K}}_5 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_6 & \hat{\mathbf{K}}_7 & \hat{\mathbf{K}}_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \hat{\mathbf{K}}_8 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_2 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_9 & \hat{\mathbf{K}}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \hat{\mathbf{K}}_{10} & \hat{\mathbf{K}}_6 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_3 & \hat{\mathbf{K}}_9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \hat{\mathbf{K}}_{11} & \hat{\mathbf{K}}_9 & \hat{\mathbf{K}}_3 & \hat{\mathbf{K}}_4 & \hat{\mathbf{K}}_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{11} & \hat{\mathbf{K}}_2 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_6 & \hat{\mathbf{K}}_7 & \hat{\mathbf{K}}_3 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_4 \\ & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{11} & \hat{\mathbf{K}}_6 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_9 & \hat{\mathbf{K}}_4 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_7 \\ & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{11} & \hat{\mathbf{K}}_2 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_3 & \hat{\mathbf{K}}_7 & \hat{\mathbf{K}}_9 \\ & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{11} & \hat{\mathbf{K}}_9 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_4 & \hat{\mathbf{K}}_3 \\ & & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_8 & 0 & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_2 \\ & & & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{10} & 0 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_6 \\ & & & & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_1 & 0 & \hat{\mathbf{K}}_2 \\ & & & & & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_5 & \hat{\mathbf{K}}_6 \\ & & & & & & & & & & & & & \hat{\mathbf{K}}_{11} \end{bmatrix}$$

sym

$$\hat{\mathbf{K}}_1 = \begin{bmatrix} \hat{k}_8 & \hat{k}_2 & \hat{k}_1 \\ \hat{k}_2 & \hat{k}_5 & \hat{k}_6 \\ \hat{k}_1 & \hat{k}_6 & \hat{k}_7 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_2 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{15} & \hat{k}_{16} & 0 \\ \hat{k}_{16} & \hat{k}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_{20} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_3 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{19} & 0 & \hat{k}_{17} \\ 0 & \hat{k}_{21} & 0 \\ \hat{k}_{17} & 0 & \hat{k}_{19} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_4 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{18} & \hat{k}_{13} & \hat{k}_{13} \\ \hat{k}_{13} & \hat{k}_9 & -\hat{k}_5 \\ \hat{k}_{13} & -\hat{k}_5 & \hat{k}_9 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_5 = \begin{bmatrix} \hat{k}_8 & \hat{k}_3 & \hat{k}_4 \\ \hat{k}_3 & \hat{k}_5 & \hat{k}_6 \\ \hat{k}_4 & \hat{k}_6 & \hat{k}_7 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_6 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{15} & -\hat{k}_{16} & 0 \\ -\hat{k}_{16} & \hat{k}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_{20} \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_7 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{19} & 0 & -\hat{k}_{17} \\ 0 & \hat{k}_{21} & 0 \\ -\hat{k}_{17} & 0 & \hat{k}_{19} \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_8 = \begin{bmatrix} \hat{k}_8 & -\hat{k}_3 & \hat{k}_4 \\ -\hat{k}_3 & \hat{k}_5 & -\hat{k}_6 \\ \hat{k}_4 & -\hat{k}_6 & \hat{k}_7 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_9 = \begin{bmatrix} \hat{k}_{18} & -\hat{k}_{13} & \hat{k}_{13} \\ -\hat{k}_{13} & \hat{k}_9 & \hat{k}_5 \\ \hat{k}_{13} & \hat{k}_5 & \hat{k}_9 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{K}}_{10} = \begin{bmatrix} \hat{k}_8 & -\hat{k}_2 & \hat{k}_1 \\ -\hat{k}_2 & \hat{k}_5 & -\hat{k}_6 \\ \hat{k}_1 & -\hat{k}_6 & \hat{k}_7 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{11} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{10} & 0 & \hat{k}_{14} \\ 0 & \hat{k}_{11} & 0 \\ \hat{k}_{14} & 0 & \hat{k}_{12} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \hat{k}_1 &= +\frac{1}{4}k_n + \frac{\sqrt{2}}{8}k_s - \frac{(2+\sqrt{2})}{8}k_t, \quad \hat{k}_2 = -\frac{1}{4}k_n + \frac{(2+\sqrt{2})}{8}k_s - \frac{\sqrt{2}}{8}k_t \\ \hat{k}_3 &= +\frac{1}{4}k_n - \frac{(2-\sqrt{2})}{8}k_s - \frac{\sqrt{2}}{8}k_t, \quad \hat{k}_4 = -\frac{1}{4}k_n + \frac{\sqrt{2}}{8}k_s + \frac{(2-\sqrt{2})}{8}k_t \\ \hat{k}_5 &= +\frac{1}{2}k_n + \frac{7}{8}k_s + \frac{1}{8}k_t, \quad \hat{k}_6 = -\frac{1}{4}k_n + \frac{1}{8}k_s + \frac{1}{8}k_t \\ \hat{k}_7 &= +\frac{1}{2}k_n + \frac{1}{8}k_s + \frac{7}{8}k_t, \quad \hat{k}_8 = +\frac{1}{2}k_n + \frac{1}{2}k_s + \frac{1}{2}k_t \\ \hat{k}_9 &= -\frac{1}{4}k_n - \frac{1}{8}k_s - \frac{1}{8}k_t, \quad \hat{k}_{10} = +2k_n + 2k_s + 2k_t \\ \hat{k}_{11} &= +2k_n + \frac{7}{2}k_s + \frac{1}{2}k_t, \quad \hat{k}_{12} = +2k_n + \frac{1}{2}k_s + \frac{2}{7}k_t \\ \hat{k}_{13} &= -\frac{\sqrt{2}}{8}k_s + \frac{\sqrt{2}}{8}k_t, \quad \hat{k}_{14} = +\frac{\sqrt{2}}{2}k_s - \frac{\sqrt{2}}{2}k_t \\ \hat{k}_{15} &= -\frac{1}{4}k_n - \frac{1}{4}k_s, \quad \hat{k}_{16} = +\frac{1}{4}k_n - \frac{1}{4}k_s \\ \hat{k}_{17} &= -\frac{1}{4}k_n + \frac{1}{4}k_t, \quad \hat{k}_{18} = -\frac{1}{4}k_s - \frac{1}{4}k_t \\ \hat{k}_{19} &= -\frac{1}{4}k_n - \frac{1}{4}k_t, \quad \hat{k}_{20} = -\frac{1}{2}k_t \\ \hat{k}_{21} &= -\frac{1}{2}k_s \end{aligned}$$

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_{1x} \\ u_{1y} \\ u_{1z} \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ u_{2z} \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ u_{3z} \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ u_{4z} \\ u_{5x} \\ u_{5y} \\ u_{5z} \\ u_{6x} \\ u_{6y} \\ u_{6z} \\ u_{7x} \\ u_{7y} \\ u_{7z} \\ u_{8x} \\ u_{8y} \\ u_{8z} \\ u_{9x} \\ u_{9y} \\ u_{9z} \\ u_{10x} \\ u_{10y} \\ u_{10z} \\ u_{11x} \\ u_{11y} \\ u_{11z} \\ u_{12x} \\ u_{12y} \\ u_{12z} \\ u_{13x} \\ u_{13y} \\ u_{13z} \\ u_{14x} \\ u_{14y} \\ u_{14z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{7x} \\ u_{6y} \\ u_{14z} \end{bmatrix} = \mathbf{T} \mathbf{v}_{red} \quad (6.1)$$

Literaturverzeichnis

- [1] ALLEN, M. P., TILDESLEY, D. J., ET AL. *Computer simulation of liquids*. Clarendon press Oxford, 1987.
- [2] ANDRÉ, D., JEBABI, M., IORDANOFF, I., CHARLES, J.-L., AND NÉAUPORT, J. Using the discrete element method to simulate brittle fracture in the indentation of a silica glass with a blunt indenter. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 265 (2013), 136–147.
- [3] BELL, N., YU, Y., AND MUCHA, P. J. Particle-based simulation of granular materials. In *Proceedings of the 2005 ACM SIGGRAPH/Eurographics symposium on Computer animation* (2005), ACM, pp. 77–86.
- [4] BERNOULLI, D. The 26th letter to Euler. *Correspondence Mathématique et Physique* 2 (1742).
- [5] BRAUN, N. *Dichte Packung durch Sechseckschichten: eine Packungsanalyse der Cambridge Structural Database*. PhD thesis, 2004.
- [6] BROWN, N. J., CHEN, J.-F., AND OOI, J. Y. A bond model for dem simulation of cementitious materials and deformable structures. *Granular Matter* 16, 3 (2014), 299–311.
- [7] CARMONA, H. A., WITTEL, F. K., KUN, F., AND HERRMANN, H. J. Fragmentation processes in impact of spheres. *Physical Review E* 77, 5 (2008), 051302.
- [8] CHAN, Y.-W., AND CHU, S.-H. Effect of silica fume on steel fiber bond characteristics in reactive powder concrete. *Cement and Concrete Research* 34, 7 (2004), 1167–1172.
- [9] CHO, N. A., MARTIN, C., AND SEGO, D. A clumped particle model for rock. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences* 44, 7 (2007), 997–1010.
- [10] CHUNG, Y., LIN, C., CHOU, P., AND HSIAU, S. Mechanical behaviour of a granular solid and its contacting deformable structure under uni-axial compression—part I: Joint DEM–FEM modelling and experimental validation. *Chemical Engineering Science* 144 (2016), 404–420.
- [11] CLEARY, P. W., AND SAWLEY, M. L. Dem modelling of industrial granular flows: 3D case studies and the effect of particle shape on hopper discharge. *Applied Mathematical Modelling* 26, 2 (2002), 89–111.

- [12] COETZEE, C., BASSON, A., AND VERMEER, P. Discrete and continuum modelling of excavator bucket filling. *Journal of terramechanics* 44, 2 (2007), 177–186.
- [13] COETZEE, C., AND ELS, D. Calibration of discrete element parameters and the modelling of silo discharge and bucket filling. *Computers and electronics in agriculture* 65, 2 (2009), 198–212.
- [14] CUNDALL, P. A. Formulation of a three-dimensional distinct element model - Part I. A scheme to detect and represent contacts in a system composed of many polyhedral blocks. In *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts* (1988), vol. 25, Elsevier, pp. 107–116.
- [15] CUNDALL, P. A., AND STRACK, O. D. A discrete numerical model for granular assemblies. *Geotechnique* 29, 1 (1979), 47–65.
- [16] CURBACH, M., AND SPECK, K. Ultra high performance concrete under biaxial compression. In *Ultra High Performance Concrete (UHPC): Proceedings of the Second International Symposium on Ultra High Performance Concrete, Kassel, Germany, March 05-07, 2008* (2008), no. 10, kassel university press GmbH, p. 477.
- [17] D’ADDETTA, G., KUN, F., AND RAMM, E. On the application of a discrete model to the fracture process of cohesive granular materials. *Granular matter* 4, 2 (2002), 77–90.
- [18] D’ADDETTA, G., KUN, F., RAMM, E., AND HERRMANN, H. From solids to granulates - discrete element simulations of fracture and fragmentation processes in geomaterials. In *Continuous and discontinuous modelling of cohesive-frictional materials*. Springer, 2001, pp. 231–258.
- [19] D’ADDETTA, G. A. *Discrete models for cohesive frictional materials*. PhD thesis, 2004.
- [20] DEL VISO, J., CARMONA, J., AND RUIZ, G. Shape and size effects on the compressive strength of high-strength concrete. *Cement and Concrete Research* 38, 3 (2008), 386–395.
- [21] DI RENZO, A., AND DI MAIO, F. P. Comparison of contact-force models for the simulation of collisions in DEM-based granular flow codes. *Chemical Engineering Science* 59, 3 (2004), 525–541.
- [22] DI RENZO, A., AND DI MAIO, F. P. An improved integral non-linear model for the contact of particles in distinct element simulations. *Chemical engineering science* 60, 5 (2005), 1303–1312.
- [23] DOBRY, R., AND NG, T.-T. Discrete modelling of stress-strain behaviour of granular media at small and large strains. *Engineering computations* 9, 2 (1992), 129–143.

- [24] DRUCKER, D. C., AND PRAGER, W. Soil mechanics and plastic analysis or limit design. *Quarterly of applied mathematics* 10, 2 (1952), 157–165.
- [25] EULER, L. *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti*. 1744.
- [26] FÖPPL, A. Mitt. mech.-techn. Lab. Mfinch (1900).
- [27] GAO, W., TAN, Y., AND ZANG, M. A cubic arranged spherical discrete element model. *International Journal of Computational Methods* 11, 05 (2014), 1350102.
- [28] GEAR, C. *Numerical initial value problems in ordinary differential equations*. Prentice-Hall series in automatic computation. Prentice-Hall, 1971.
- [29] GRAYBEAL, B., AND DAVIS, M. Cylinder or cube: strength testing of 80 to 200 MPa (11.6 to 29 ksi) ultra-high-performance fiber-reinforced concrete. *Materials Journal* 105, 6 (2008), 603–609.
- [30] GRIFFITHS, D., AND MUSTOE, G. G. Modelling of elastic continua using a grillage of structural elements based on discrete element concepts. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 50, 7 (2001), 1759–1775.
- [31] HASSAN, A., JONES, S., AND MAHMUD, G. Experimental test methods to determine the uniaxial tensile and compressive behaviour of ultra high performance fibre reinforced concrete (uhpfrc). *Construction and building materials* 37 (2012), 874–882.
- [32] HEDJAZI, L., MARTIN, C., GUESSASMA, S., DELLA VALLE, G., AND DENDIEVEL, R. Application of the discrete element method to crack propagation and crack branching in a vitreous dense biopolymer material. *International Journal of Solids and Structures* 49, 13 (2012), 1893–1899.
- [33] HERTZ, H. Über die Berührung fester elastischer Körper. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 92 (1882), 156–171.
- [34] HORN, B. K. Closed-form solution of absolute orientation using unit quaternions. *JOSA A* 4, 4 (1987), 629–642.
- [35] HOU, Q., DONG, K., AND YU, A. DEM study of the flow of cohesive particles in a screw feeder. *Powder Technology* 256 (2014), 529–539.
- [36] JENSEN, R. P., BOSSCHER, P. J., PLESHA, M. E., AND EDIL, T. B. DEM simulation of granular media - structure interface: effects of surface roughness and particle shape. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 23, 6 (1999), 531–547.
- [37] JOHNSON, K. L., AND JOHNSON, K. L. *Contact mechanics*. Cambridge university press, 1987.

- [38] JOHNSON, L., AND RIESS, R. *Numerical Analysis*. Addison-Wesley world student series. Addison-Wesley Publishing Company, 1977.
- [39] KAIXIN, L., AND LINGTIAN, G. The application of discrete element method in solving three-dimensional impact dynamics problems. *Acta mechanica solida sinica* 16, 3 (2003), 256–261.
- [40] KIM, D.-J., NAAMAN, A. E., AND EL-TAWIL, S. High performance fiber reinforced cement composites with innovative slip hardening twisted steel fibers. *International Journal of Concrete Structures and Materials* 3, 2 (2009), 119–126.
- [41] KREMMER, M., AND FAVIER, J. A method for representing boundaries in discrete element modelling - part I: Geometry and contact detection. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 51, 12 (2001), 1407–1421.
- [42] KUIPERS, J. B. *Quaternions and rotation sequences*, vol. 66. Princeton university press Princeton, 1999.
- [43] KUN, F., AND HERRMANN, H. J. A study of fragmentation processes using a discrete element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 138, 1 (1996), 3–18.
- [44] KUN, F., VARGA, I., LENNARTZ-SASSINEK, S., AND MAIN, I. G. Rupture cascades in a discrete element model of a porous sedimentary rock. *Physical review letters* 112, 6 (2014), 065501.
- [45] KUPFER, H., AND ZELGER, C. *Das Verhalten des Betons unter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der Zweiachsigen Beanspruchung: Bau und Erprobung einer Versuchseinrichtung für Zweiachsige Belastung*. Ernst, 1973.
- [46] KUPFER, H. B., AND GERSTLE, K. H. Behavior of concrete under biaxial stresses. *Journal of the Engineering Mechanics Division* 99, 4 (1973), 853–866.
- [47] KUZNETSOV, V., AND LEVYAKOV, S. Complete solution of the stability problem for elastica of euler’s column. *International journal of non-linear mechanics* 37, 6 (2002), 1003–1009.
- [48] LE, B. D., KOVAL, G., AND CHAZALLON, C. Discrete element approach in brittle fracture mechanics. *Engineering Computations* 30, 2 (2013), 263–276.
- [49] LI, S., MING, C., KAI-XIN, L., WEI-FU, L., AND SHI-YANG, C. New discrete element models for three-dimensional impact problems. *Chinese Physics Letters* 26, 12 (2009), 120202.
- [50] LOCH, M. *Beitrag zur Bestimmung von charakteristischen Werkstofffestigkeiten in Bestandtragwerken aus Stahlbeton*. PhD thesis, Technische Universität Kaiserslautern, 2014.

- [51] LUDING, S. Cohesive, frictional powders: contact models for tension. *Granular matter* 10, 4 (2008), 235–246.
- [52] MAGNIER, S. A., AND DONZÉ, F.-V. Numerical simulations of impacts using a discrete element method. *Mechanics of Cohesive-frictional Materials* 3, 3 (1998), 257–276.
- [53] MARKOVICH, I., VAN MIER, J., AND WALRAVEN, J. Single fiber pullout from hybrid fiber reinforced concrete. *Heron* 46, 3 (2001), 191–200.
- [54] MARSHALL, J. Discrete-element modeling of particulate aerosol flows. *Journal of Computational Physics* 228, 5 (2009), 1541–1561.
- [55] MESCHKE, G., LACKNER, R., AND MANG, H. An anisotropic elastoplastic-damage model for plain concrete. *International journal for numerical methods in engineering* 42, 4 (1998), 703–727.
- [56] MIKAMI, T., KAMIYA, H., AND HORIO, M. Numerical simulation of cohesive powder behavior in a fluidized bed. *Chemical Engineering Science* 53, 10 (1998), 1927–1940.
- [57] MUNJIZA, A., OWEN, D., AND BICANIC, N. A combined finite-discrete element method in transient dynamics of fracturing solids. *Engineering computations* 12, 2 (1995), 145–174.
- [58] NAAMAN, A. E., AND NAJM, H. Bond-slip mechanisms of steel fibers in concrete. *Materials Journal* 88, 2 (1991), 135–145.
- [59] NORDSIECK, A. On numerical integration of ordinary differential equations. *Mathematics of computation* 16, 77 (1962), 22–49.
- [60] OBERMAYR, M., AND VRETTOS, C. Anwendung der Diskrete-Elemente-Methode zur Vorhersage von Kräften bei der Bodenbearbeitung. *Geotechnik* 36, 4 (2013), 231–242.
- [61] OETTEL, V., AND EMPELMANN, M. Zugspannungs-Dehnungs-Beziehung für UHPFRC in Anlehnung an DAfStb-Richtlinie Stahlfaserbeton. *Beton-und Stahlbetonbau* 110, 7 (2015), 468–478.
- [62] OGARKO, V., AND LUDING, S. A fast multilevel algorithm for contact detection of arbitrarily polydisperse objects. *Computer physics communications* 183, 4 (2012), 931–936.
- [63] PARK, S. H., KIM, D. J., RYU, G. S., AND KOH, K. T. Tensile behavior of ultra high performance hybrid fiber reinforced concrete. *Cement and Concrete Composites* 34, 2 (2012), 172–184.
- [64] PAULICK, M., MORGENEYER, M., AND KWADÉ, A. Review on the influence of elastic particle properties on dem simulation results. *Powder Technology* 283 (2015), 66–76.

- [65] RIERA, J., MIGUEL, L., AND ITURRIOZ, I. Evaluation of the discrete element method (DEM) and of the experimental evidence on concrete behaviour under static 3D compression. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures* (2016).
- [66] SAWAMOTO, Y., TSUBOTA, H., KASAI, Y., KOSHIKA, N., AND MORIKAWA, H. Analytical studies on local damage to reinforced concrete structures under impact loading by discrete element method. *Nuclear Engineering and Design* 179, 2 (1998), 157–177.
- [67] SCHLANGEN, E., AND VAN MIER, J. Experimental and numerical analysis of micromechanisms of fracture of cement-based composites. *Cement and concrete composites* 14, 2 (1992), 105–118.
- [68] SCHLANGEN, H. Experimental and numerical analysis of fracture processes in concrete.
- [69] SCHMIDT, M., AND FEHLING, E. Ultra-Hochfester Beton - Planung und Bau der ersten Brücke mit UHPC in Europa. *Schriftenreihe Baustoffe und Massivbau*, 2 (2003).
- [70] SCHNEIDER, B. J. *Polygonale diskrete Elemente zur Modellierung heterogener Materialien*. PhD thesis, 2012.
- [71] SCHNELL, J., SCHLADITZ, K., AND SCHULER, F. Richtungsanalyse von Fasern in betonen auf basis der computer-tomographie. *Beton-und Stahlbetonbau* 105, 2 (2010), 72–77.
- [72] SHÄFER, J., DIPPEL, S., AND WOLF, D. Force schemes in simulations of granular materials. *Journal de physique I* 6, 1 (1996), 5–20.
- [73] SHIGETO, Y., AND SAKAI, M. Parallel computing of discrete element method on multi-core processors. *Particuology* 9, 4 (2011), 398–405.
- [74] SHIU, W., DONZE, F. V., AND DAUDEVILLE, L. Discrete element modelling of missile impacts on a reinforced concrete target. *International Journal of Computer Applications in Technology* 34, 1 (2009), 33–41.
- [75] SPECK, K. *Beton unter mehraxialer Beanspruchung*. PhD thesis, 2008.
- [76] STEUBEN, J., MUSTOE, G., AND TURNER, C. Massively parallel discrete element method simulations on graphics processing units. *Journal of Computing and Information Science in Engineering* (2014).
- [77] TAVAREZ, F. A., AND PLESHA, M. E. Discrete element method for modelling solid and particulate materials. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 70, 4 (2007), 379–404.
- [78] THORNTON, C., AND RANDALL, C. Applications of theoretical contact mechanics to solid particle system simulation.

- [79] TIMOSHENKO, S. P., AND GERE, J. M. Theory of elastic stability. 1961. *McGrawHill-Kogakusha Ltd, Tokyo* (1961), 9–16.
- [80] TSUJI, Y., TANAKA, T., AND ISHIDA, T. Lagrangian numerical simulation of plug flow of cohesionless particles in a horizontal pipe. *Powder technology* 71, 3 (1992), 239–250.
- [81] VAN MIER, J. G. *Fracture processes of concrete*, vol. 12. CRC press, 1996.
- [82] VONK, R. *A Micromechanical Investigation of Softening of Concrete Loaded in Compression*. Stevin-Laboratory of the Faculty of Civil Engineering, University of Technology, 1993.
- [83] WANG, Y., AND MORA, P. Macroscopic elastic properties of regular lattices. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 56, 12 (2008), 3459–3474.
- [84] WIETEK, B. *Faserbeton: im Bauwesen*. Springer-Verlag, 2014.
- [85] WILLE, K., AND NAAMAN, A. Bond stress-slip behavior of steel fibers embedded in ultra high performance concrete. In *Proceedings of 18th European conference on fracture and damage of advanced fiber-reinforced cement-based materials* (2010), pp. 99–111.
- [86] WILLE, K., AND NAAMAN, A. E. Effect of ultra-high-performance concrete on pullout behavior of high-strength brass-coated straight steel fibers. *ACI Materials Journal* 110, 4 (2013).
- [87] WILLIAMS, J. R., AND O’CONNOR, R. A linear complexity intersection algorithm for discrete element simulation of arbitrary geometries. *Engineering computations* 12, 2 (1995), 185–201.
- [88] ZANG, M., LEI, Z., AND WANG, S. Investigation of impact fracture behavior of automobile laminated glass by 3D discrete element method. *Computational Mechanics* 41, 1 (2007), 73–83.
- [89] ZHAO, C., HOBBS, B., ORD, A., HORNBY, P., PENG, S., AND LIU, L. Particle simulation of spontaneous crack generation problems in large-scale quasi-static systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69, 11 (2007), 2302–2329.
- [90] ZHAO, D., NEZAMI, E. G., HASHASH, Y. M., AND GHABOUSSI, J. Three-dimensional discrete element simulation for granular materials. *Engineering Computations* 23, 7 (2006), 749–770.
- [91] ZUBELEWICZ, A., AND BAZANT, Z. P. Interface element modeling of fracture in aggregate composites. *Journal of Engineering Mechanics* 113, 11 (1987), 1619–1630.

Berichte aus dem Institut für Statik ab 2003

- Nr. 2003-96 B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen
- Nr. 2003-97 J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme
- Nr. 2003-98 O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen
- Nr. 2005-99 A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen
- Nr. 2006-100 D. DINKLER (HRSG.): Institut für Statik, Lehre und Forschung, 1996-2006
- Nr. 2006-101 A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen
- Nr. 2006-102 M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden
- Nr. 2006-103 L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt
- Nr. 2006-104 T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten
- Nr. 2007-105 C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos
- Nr. 2007-106 V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2007-107 J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit und Grenzlaster von Schalentragsystemen
- Nr. 2009-108 M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck
- Nr. 2010-109 P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien
- Nr. 2010-110 J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading
- Nr. 2010-111 K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren
- Nr. 2011-112 S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills
- Nr. 2011-113 L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton – Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse
- Nr. 2012-114 B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten
- Nr. 2012-115 J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Deponiestrukturen

- Nr. 2015-116 F. PASENOW: Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien
- Nr. 2015-117 M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich
- Nr. 2016-118 A. ALFARRA: Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen
- Nr. 2016-119 S. REINSTÄDLER: Modellierung und numerische Analyse der Entleerung von dünnwandigen Silos
- Nr. 2016-120 F. CRAMER: Mehrfeld-Modell für chemisch-physikalische Alterungsprozesse von Beton
- Nr. 2018-121 T. BLUME: Mikromechanisch begründete Modellbildung des thermo-mechanischen Werkstoffverhaltens von Asphalt

Sonderdrucke Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens

Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998)

Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky

Baustatik-Baupraxis 8

Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig

Herausgeber: D. Dinkler

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig

Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Deutschland

Telefon +49 (0)531 / 391-3667, Telefax +49 (0)531 / 391-8116

E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <https://www.tu-braunschweig.de/statik>